Сергей Гаврилов

Тензорное исчисление для «чайников»

1-1. Инварианты

Изучение общей теории относительности (да и специальной – на адекватном уровне) затрудняется особым математическим аппаратом: *тензорами*. Полагаю, что с тензорами у вас плохо? Мутная какая-то тема…

Здесь я попытался дать базовые сведения, которые должны помочь понимать физические тексты. Предполагается, что читатель имеет образование в рамках втуза, что-то из институтской математики помнит (и из физики тоже). А вот школьного курса, к сожалению, никак недостаточно.

Ожидается готовность воспринимать новые взгляды, новый непривычный подход. Да и просто желание разобраться. Потому что потребуется изрядная перенастройка мозгов!

Читатель не найдет здесь строгости и полноты изложения, оставим их математикам. Хотелось представить тему как можно доступнее – как ныне говорится, для «чайников». Увы, сам предмет сложен, и ошибется тот, кто решит, что можно освоить материал, не утруждаясь собственной работой мысли.

Также даны обширные иллюстрации применения тензоров в некоторых разделах теоретической физики. Их никоим образом не следует рассматривать как исчерпывающее изложение этих физических тем – на то существуют учебники!

Введение в тему

Запишем в качестве примера известную школьную формулу закона Ньютона с векторами силы и ускорения:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Мы, конечно, можем считать ее сокращенной записью трех уравнений:

$$F_x = ma_x,$$

$$F_y = ma_y,$$

$$F_z = ma_z.$$

На самом деле здесь нечто большее. Первое уравнение – это *инвариантная запись*, в отличие от формы *неинвариантной*, через компоненты векторов. Что это означает?

Инвариантная форма никак не изменится при переходе к другим координатам. В то время как F_x, F_y, F_z, a_x, a_y, a_z зависят от принятых координат.

Запись физических уравнений в инвариантном виде является более «правильной»! Поскольку законы природы не могут же зависеть от произвольного, случайного выбора системы координат. Между прочим, инвариантная форма не содержит в явном виде информации о *размерности* (числе измерений) пространства – эта размерность должна подразумеваться особо.

Пока что нам удалось инвариантно записать умножение вектора на коэффициент m. Негусто, кажется… С другими операциями (как скалярное произведение) уже возникнут трудности. Тем более, когда от векторов мы перейдем к более сложным объектам. Потребуются особые приемы. Им и предстоит научиться.

Тензор – то, что отвечает трем пунктам:

1) это математическое представление некоторого объекта (геометрического или физического), существующего в пространстве, в виде таблицы величин – компонент тензора;

2) значения компонент зависят от принятой системы координат, и изменяются (преобразуются) при переходе к другим координатам;

3) преобразование компонент таково, что оставляет, тем не менее, неизменными некоторые особые величины – инварианты.

Итак, тензор это таблица или матрица чисел (компонент, зависящих от выбранных координат). В то же время **задача тензорного исчисления – развить такую форму записи тензоров, чтобы обойтись без таблиц компонент**. То есть, инвариантную форму. Которая, тем не менее, позволит записывать любые (инвариантные) операции над тензорами.

Начнем с вектора

Частным примером тензора и является *вектор*, который привычно видится чем-то вроде палки, заостренной на конце. При всей комичности такого представления, оно отчасти даже полезно. Ясно, что **вектор это цельный, самостоятельный объект**, независимый от того, как мы его представим математически.

Принцип целостности вообще любого тензора может показаться тривиальным… Но мы убедимся, что из него вытекают особые следствия.

Во всяком случае, пока отметим, что вектор объективно имеет *длину*.

Вектор рассматривается в пространстве. Пространство характеризуется *числом измерений*, фиксированным для данного класса задач.

Мы не сомневаемся в том, что в пространстве введены векторные операции: сложение векторов и умножение вектора на число.

В трехмерном пространстве рассмотрим перемещение из точки A в точку B. Его принято изображать вектором, то есть направленным отрезком из A в B. Это так называемый *вектор перемещения* $\mathbf{x}$ (обычный геометрический вектор). Впрочем, считают, что вектор не меняется при параллельном переносе.

Очевидно, что при сложении перемещений – результирующее перемещение (векторная сумма) определяется по известному *правилу параллелограмма*.

Компоненты вектора

Нужно уметь производить с нашим объектом (вектором) операции – пользоваться *векторной алгеброй*. Для этого вводят *систему координат*, или *базис*.

В пространстве (до поры будем считать его трехмерным) выберем три вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Это будут *единичные векторы*, или *орты*. Непременное условие: орты линейно независимы. Это значит, что ни один из них нельзя представить в виде линейной комбинации остальных (такое было бы, если бы тройка векторов лежала в одной плоскости).

Несложно доказать, что любой вектор $\mathbf{x}$ можно представить однозначным образом в виде: $\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3$, то есть в качестве линейной комбинации ортов. Коэффициенты (x^1, x^2, x^3) и есть *компоненты* вектора $\mathbf{x}$ в принятом базисе. Если больше нравится, можете называть их *координатами* вектора.

Примечание: верхние индексы – это не показатели степени, а попросту индексы! Степени тут всюду первые, ведь мы занимаемся чисто линейными преобразованиями.

Имея в виду представление через компоненты, вектор далее нередко будем обозначать по типу: (x^1, x^2, x^3), или, короче, x^i.

Все помнят, конечно, что операции с векторами представляются в координатах так:

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^3 + y^3)$ – сложение векторов,

$a\mathbf{x} = (ax^1, ax^2, ax^3)$ – умножение вектора на число.

Матричное представление

Тензор это таблица величин, и вектор, в частности – тоже. Значит, для них естественно матричное представление, иногда привлекать его бывает удобно. Разумеется, вектор это матрица-столбец или матрица-строка. Так, вектор $x^i(x^1, x^2, x^3)$ можно изобразить матрицей:

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}.$$

Полезно вспомнить хотя бы базовые понятия, относящиеся к матрицам – они далее пригодятся.

Упоминание матриц не вызывает энтузиазма у читателей. Но они потребуются только на этапе обоснований, а вообще-то суть дела в том, чтобы обходиться без них.

Переходим к другим координатам

Если мы выберем другой базис (например, повернем оси координат), то компоненты вектора изменятся. Разумеется, новые компоненты (x'^1, x'^2, x'^3) можно выразить через прежние (x^1, x^2, x^3), если знать углы поворота осей. Задача кажется весьма громоздкой, с синусами и косинусами… В общем же виде она проста:

$$\begin{aligned} x'^1 &= a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3\,, \\ x'^2 &= a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3\,, \qquad (1.1) \\ x'^1 &= a_{31}x^1 + a_{32}x^2 + a_{33}x^3\,. \end{aligned}$$

Можно записать коэффициенты a_{ik} в виде матрицы преобразования:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Правда, пока неясно, чему равны эти коэффициенты… Но есть хорошая новость: мы и не будем здесь интересоваться их конкретными выражениями. Достаточно иметь в виду, что они существуют и известны (могут быть выведены, или взяты из справочной литературы).

Важно одно: любой объект, компоненты которого преобразуются согласно (1.1), является вектором. А если нет – то не является. Хотя бы он изображался тройкой чисел!

Внимание: если в некоторой системе координат все компоненты вектора равны нулю, то они нулевые и в любой другой системе! Это же относится к тензорам вообще.

Длина вектора в прямоугольных координатах

Если мы имеем декартову, то есть ортогональную (а еще точнее – ортонормальную) систему координат, то длина геометрического вектора **x** (ее квадрат) выражается через компоненты общеизвестным образом по теореме Пифагора:

$$\mathbf{x}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\,. \qquad (1.2)$$

Двойка за скобками здесь изображает уже показатель степени, разумеется.

При переходе к другому базису, когда значения компонент изменятся, длина должна остаться той же самой. Ведь она является атрибутом собственно вектора! По нашему уговору, она не может зависеть от выбора координат. Говорят, что **длина инвариантна** относительно перехода к другим координатам; является *инвариантом* вектора.

По существу это определяет требования к формулам преобразования координат, то есть к той самой матрице коэффициентов a_{ik}: их значения не могут быть произвольными!

Скаляр

Вероятно, еще из школы вам запало в память правило: величины делятся на векторные и скалярные; все, что не вектор, то скаляр.

В тензорном исчислении *скаляр* это тоже тензор (самый простой – нулевого ранга). Это **число-инвариант, не меняющееся при переходе к другим координатам**. Применительно к вектору, его длина – классический скаляр. Далее мы узнаем, что скаляры получаются как окончательный результат свертки тензоров.

Любая из компонент вектора – число. И не вектор… Но скаляром его тоже не считают: ведь эта величина не инвариантна.

Скалярное произведение

Напомню о понятии *скалярного произведения* двух векторов. Оно выражается через координаты так:

$$\mathbf{xy} = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 .$$

Собственно говоря, **квадрат длины вектора – это просто его скалярное произведение на себя** (так называемый *скалярный квадрат*).

Внимание: мы принимаем, что скалярное произведение существует, и обладает некоторыми известными свойствами! Такое пространство называют *евклидовым*.

Скалярное произведение тоже инвариантно (как любой скаляр). Ведь оно несет геометрический смысл, независимый от координатного представления: произведение длин векторов и косинуса угла.

Теперь вы подготовлены к тому, чтобы понять, в каком смысле говорят об **инвариантности вектора, да и вообще любого тензора**. Идея, что тензор является чем-то целостным, выливается в утверждение об его инвариантности при преобразованиях координат, имея в виду все то, что вы уже успели узнать.

Наверняка затронутые до сих пор вопросы кажутся тривиальными, общеизвестными. Но теперь – важное предупреждение. Следующий параграф, хотя и рябит формулами (элементарными по сути), требует внимательного прочтения: он ключевой для понимания всего.

Два сюрприза

Прямоугольные координаты это случай все-таки специальный. Система координат может быть, скажем, косоугольной (единичные векторы не ортогональны). Ясно, что формула для скалярного квадрата окажется сложнее, чем (1.2). Однако (и тут снова хорошая новость!) мы выводить ее не собираемся. Достаточно записать в общем виде:

$$\mathbf{x}^2 = g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + g_{33}(x^3)^2 + g_{12}x^1x^2 + g_{13}x^1x^3 + g_{23}x^2x^3 + g_{21}x^2x^1 + g_{31}x^3x^1 + g_{32}x^3x^2 .$$

Откуда такое? Да просто из соображений размерности – это квадратичная форма! Некие коэффициенты g_{ik} зависят от конкретной системы координат.

Конечно, можно привести подобные члены, и тогда слагаемых выйдет 6, а не 9… Но мы, наоборот, специально вводим из соображений симметрии $g_{ik} = g_{ki}$: так будет удобнее.

Теперь запишем то же самое немного иначе:

$$\mathbf{x}^2 = (g_{11}x^1)x^1 + (g_{22}x^2)x^2 + (g_{33}x^3)x^3 + (g_{12}x^1)x^2 + (g_{13}x^1)x^3 + (g_{23}x^2)x^3 +$$

$$+(g_{21}x^2)x^1+(g_{31}x^3)x^1+(g_{32}x^3)x^2 .$$

И окончательно:

$$\mathbf{x}^2 = x_1x^1 + x_2x^2 + x_3x^3 . \qquad (1.3)$$

Здесь мы просто ввели обозначения:

$$x_1 = g_{11}x^1 + g_{12}x^2 + g_{13}x^3 ,$$
$$x_2 = g_{21}x^1 + g_{22}x^2 + g_{23}x^3 , \qquad (1.4)$$
$$x_3 = g_{31}x^1 + g_{32}x^2 + g_{33}x^3 .$$

Сюрприз: формула (1.3) нам знакома – снова скалярное произведение! В случае декартовых координат квадрат длины это скалярное произведение вектора на себя же. А здесь, для общего случая, – это скалярное произведение вектора x^i на… что? На некоторый другой вектор $x_i(x_1, x_2, x_3)$. Его называют *ковектором*, то есть сопряженным вектором.

Ковектор является тоже вектором – факт вообще-то неочевидный… Тем не менее, это так. Потому что его произведение с вектором – скаляр (скалярный квадрат). Вообще линейные операции с тензорами приводят к тензорам же!

Но, позвольте: формулы (1.4) нам тоже известны, это формулы преобразования координат, сравним их с (1.1). Получается (опять сюрприз), ковектор – это никакой не другой, а тот же самый вектор **x**! Но только представленный в некоторой другой системе координат (ее называют иногда *дуальной*).

Вот вы и познакомились с главной уловкой тензорного исчисления.

<u>И для чего они нужны</u>

Ясно, что в ортогональном базисе оба представления вектора x^i и x_i совпадают (то есть имеют идентичные компоненты). Дуальная система координат здесь попросту совпадает с главной. И только в общем случае компоненты будут различаться.

Но тогда, казалось бы, приведенные выше построения, хотя и любопытны, но излишни. Просто условимся использовать декартовы координаты!

Увы, такое возможно не всегда. Например, в искривленных пространствах пересечение сетки параллельных прямых не может быть всюду под прямым углом. В них вообще может не существовать параллельных прямых! (рассмотрите в качестве двумерного примера поверхность сферы, где «прямыми» являются окружности больших кругов). А такие хитрые пространства встречаются в физике.

Разделы, еще ожидающие вас впереди, как раз и посвящены применению тензорного аппарата в некоторых разделах физики.

1-2. Базовые понятия тензорного исчисления

В конце предыдущего раздела мы нашли способ **записывать инвариант** (скалярный квадрат) **в инвариантной форме**. В самом деле, наша формула $\mathbf{x}^2 = x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3$ – в любой системе координат выглядит одинаково – помните наши два сюрприза? Преобразования координат в ней есть… но как бы скрыты. Далее нам предстоит убедиться, что и в более сложных случаях также легко обеспечивается простая форма записи. В этой простоте и состоит главная идея.

Правда, такое видимое упрощение достигается ценой введения разного типа представления одного и того же вектора. Это как раз и обозначается различным размещением индекса: вверху или внизу (а вы, наверно, гадали – почему?) Они называются: *контравариантное* и *ковариантное* представление.

Ковариантность и контравариантность

Один и тот же вектор можно **записать как в ковариантных, так и в контравариантных компонентах**. Обычно какие-то из них являются для рассматриваемого вектора естественными. То есть действующими именно в тех координатах, которые присущи задаче.

Координаты геометрического вектора (вектора перемещения) **являются естественно контравариантными**. Контравариантный вектор обозначается в форме x^i, то есть с индексом наверху.

Компоненты контравариантного вектора изменяются как бы противоположно изменению векторов базиса (отсюда название). Вот примитивный поясняющий пример. Пусть мы перешли от одной системы координат к другой – такой, что:

$$x'^1 = kx^1,\ x'^2 = x^2,\ x'^3 = x^3\ \ (k > 1).$$

Говоря попросту, мы изменили масштаб первой оси, сделав его более мелким. Новая единица длины на этой оси уменьшилась, и составляет $\frac{1}{k}$ от старой. А соответствующая новая компонента вектора, напротив того, увеличилась в k раз – как бы противоположно масштабу оси. Это и есть контравариантность.

Для ковариантного вектора все наоборот… Но это мы разберем чуть ниже.

Хотя тот же самый вектор перемещения можно представить и в ковариантной форме: x_i. Его ковариантные компоненты x_1, x_2, x_3 – это составляющие не в базисе нашей задачи. А в некоторой другой (дуальной) системе координат. Просто мы знаем, как к ней переходить: через коэффициенты g_{ik}. И потому такой переход держим в уме, оставляем его за кадром.

Правило Эйнштейна

Тензорное исчисление зародилось в середине XIX века, но было не слишком в ходу. Свое настоящее признание оно получило в связи с общей теорией относительности Эйнштейна, которая не может быть изложена иначе, как в тензорной форме.

Правило Эйнштейна позволяет еще более упростить запись многих тензорных выражений.

В соответствии с этим правилом, выражение для скалярного квадрата запишется компактнее:

$$\mathbf{x}^2 = x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3 = x_i x^i\ .$$

Правило состоит в том, что **по индексу, встречающемуся дважды** (один раз наверху, другой раз внизу) **подразумевается суммирование**. То есть, $a_i b^i$ – это просто сокращенная запись выражения: $\sum_i a_i b^i$. Здесь индекс i (пробегающий значения 1, 2, 3) называется *немым*: в результирующее выражение он не вошел – как бы «сократился». В подобных случаях говорят, что произведена *свертка*. Подробно о ней будет ниже.

О ковариантных векторах

В пространстве задано скалярное поле φ. Построим частные производные:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x^2},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}.$$

Их смысл – изменение величины поля вдоль данного направления на единицу протяженности.

Если эти величины рассматривать как компоненты, то можно убедиться, что мы имеем дело с вектором **y**: при повороте осей пересчет координат будет по стандартным формулам. Такой вектор, как известно, называют *градиентом поля*.

Пусть масштаб первой оси снова сжали в k раз. Единица протяженности сократилась, но само поле-то не изменилось. Ясно, что изменение поля в пересчете на новую, уменьшенную единицу будет соответственно меньше:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'^1} = \frac{\partial\varphi}{\partial(kx^1)} = \frac{1}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}.$$

Компонента вектора изменилась в те же сторону, что и масштаб оси!

Такое свойство векторов называется *ковариантностью*. **Вектор градиента естественно ковариантен** в том базисе, в котором задано поле. Таким образом:

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = y_i.$$

Отметим себе простое правило: если контравариантные компоненты стоят в знаменателе, то мы получим ковариантность. И наоборот, разумеется.

Тензоры

Перепишем еще раз формулы (1.4) получения ковариантных компонент из исходных контравариантных:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_{11}x^1 + g_{12}x^2 + g_{13}x^3, \\ x_2 &= g_{21}x^1 + g_{22}x^2 + g_{23}x^3, \\ x_3 &= g_{31}x^1 + g_{32}x^2 + g_{33}x^3. \end{aligned} \qquad (1.4)$$

И присмотримся к выражениям. Мы увидим в них результат умножения двух матриц:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}.$$

Помните, мы упомянули, что вектор это частный случай тензора? Пора уточнить, что **вектор это тензор первого ранга** (иногда вместо «ранг» говорят «валентность»). Контравариантный вектор принято изображать матрицей-столбцом. Ковариантный – матрицей-строкой.

А в лице матрицы 3х3 (g_{ik}) мы знакомимся здесь с *тензором второго ранга*. Тензор третьего ранга придется уже представить себе в виде трехмерной, кубической таблицы. И так далее.

Количество индексов в символическом обозначении соответствует рангу тензора. А длины строк и столбцов всегда соответствуют числу измерений пространства (в нашем примере оно трехмерно).

Тензор второго ранга это вектор, компоненты которого, в свою очередь, являются векторами.

Запись тензорных выражений

Запишем (1.4) сокращенной записью:

$$x_i = g_{ik}x^k . \qquad (1.5)$$

Что мы можем усмотреть из (1.5)? Многое.

1) Это запись, укороченная по правилу Эйнштейна. В полном виде она выглядит так:

$$x_i = \sum_k g_{ik}x^k . \qquad (1.5а)$$

Здесь *k* это немой индекс (не попадающий в результат).

2) g_{ik} это условное обозначение *ковариантного тензора второго ранга*. Второго – потому что два индекса. Ковариантного – потому что индексы внизу. А внизу потому, что есть правило: повторяющиеся индексы должны чередоваться (верх – низ). При комбинировании ковариантных и контравариантных компонент законы их преобразования взаимно «сокращаются».

3) Результат является ковариантным вектором (*i* внизу), потому что и справа индекс *i* ковариантный.

4) Количество измерений пространства (количество значений, которые пробегает индекс суммирования) здесь явно не видно, и должно подразумеваться из контекста задачи.

5) Соответственно, под (1.5а) следует понимать три формулы для $i = 1, 2, 3$:

$$x_1 = \sum_k g_{1k}x^k ,$$

$$x_2 = \sum_k g_{2k}x^k ,$$

$$x_3 = \sum_k g_{3k}x^k .$$

Но это все тоже остается за кадром, как неинвариантная форма, от которой мы уходим.

Тензорные операции. Произведение

Возможно покомпонентное сложение тензоров одинаковой структуры, умножение их на число – на этом особо задерживаться не будем. Пространство тензоров, как и в случае векторов, полагаем линейным, то есть результат таких операций будет снова тензором.

По большому счету придется иметь в виду две основные операции с тензорами: *перемножение* и *свертка*. Эти **операции над тензорами приводят к тензорам же**.

Вот иллюстрация тензорного произведения:

$$x^i y^k = X^{ik} = \begin{bmatrix} x^1y^1 & x^2y^1 & x^3y^1 \\ x^1y^2 & x^2y^2 & x^3y^2 \\ x^1y^3 & x^2y^3 & x^3y^3 \end{bmatrix}.$$

Как видим, результирующий тензор X^{ik} это тензор суммарного ранга. Он содержит **компоненты, равные произведению компонент сомножителей – каждый с каждым**. А все индексы сомножителей просто перешли к произведению.

А, например, произведение: $A^{ik}B_{lmn} = C^{ik}{}_{lmn}$ – будет тензором 5-го ранга. Причем, как говорят, *смешанным*: дважды контравариантным и три раза ковариантным.

Внимание: тензорное произведение некоммутативно! Поменяем местами x и y – тензор X также изменится (в данном случае поменяются местами столбцы и строки, матрица перейдет в *транспонированную*).

Собственно говоря, тензор и можно определить как «тензорное» произведение векторов. Но такое определение было бы слишком узким: не всякий тензор можно представить тензорным произведением!

Пусть мы хотим преобразовать тензор $X^{ik} = x^i y^k$ к другим координатам. Тензорные операции обязаны быть инвариантными, а значит:

$X'^{ik} = x'^i\ y'^k$.

Но преобразовывать векторы x и y мы умеем:

$x'^i = a_{il}x^l$, $y'^k = a_{km}y^m$,

где $a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ – матрица преобразования координат.

Получаем: $X'^{ik} = a_{il}a_{km}x^i y^k = a_{il}a_{km}X^{ik}$.

Пусть теперь наш тензор имеет вид:

$Z^{ik} = x^i y^k + u^i v^k$ – не раскладывается на тензорное произведение двух векторов. Очевидно, что его преобразование к другим координатам выглядит так:

$Z'^{ik} = a_{il}a_{km}x^i y^k + a_{il}a_{km}u^i v^k = a_{il}a_{km}Z^{ik}$.

Тензор преобразуется точно так же, как и тензорное произведение векторов, хотя таковым не является! Определение тензора можно расширить: тензор n-го ранга это объект, преобразующийся через $a_{il}a_{km}...$ (n раз), где a – матрица преобразования вектора.

Свертка

Мы уже отметили свертку – на примере скалярного квадрата вектора: простейшая свертка это скалярное произведение. Рассмотрим вопрос подробнее.

Свертка возникает при записи перемножения, когда один из индексов повторяется сверху и снизу. Так произведение:

$A^{ik}B_{imn} = C^k{}_{mn}$ – будет иметь не 5-й, а 3-й ранг: при однократной свертке ранг понижается на 2. Здесь свертка идет по индексу i.

Вспомнив, что повторяющийся индекс означает суммирование, распишем нашу свертку детально:

$$A^{ik}B_{imn} = \sum_i A^{ik}B_{imn} = A^{1k}B_{1mn} + A^{2k}B_{2mn} + A^{3k}B_{3mn}.$$

Здесь видно, каким образом пропадает немой индекс i.

Свертка тензора 2-го ранга внутри себя называется *следом* тензора, специалисты старой школы предпочитают немецкий эквивалент: *шпур* (Spur). Так квадрат длины $\mathbf{x}^2 = x_i x^i$ это след (шпур) тензора $X_i^i = x_i x^i$. В прямоугольных координатах это сумма элементов его главной диагонали.

Очевидно, что **след, как любой скаляр – инвариант**.

Инварианты тензора

Мы знаем, что инвариантом вектора является его длина, выражающаяся через свертку вектора с ковектором. А что с тензором большего ранга?

Любой тензор имеет инвариант (скаляр), получающийся сверткой с сопряженным тензором. Так, инвариантом тензора второго ранга, дважды контравариантного: A^{ik} – будет, очевидно, выражение: $A^{ik} A_{ik}$. Вы не забыли, что это не что иное, как двойная сумма?

Ради полной ясности, все-таки распишем, что такое двойная свертка. Сначала свертываем, например, по индексу i:

$$A^{ik} A_{ik} = A^{1k} A_{1k} + A^{2k} A_{2k} + A^{3k} A_{3k} .$$

Вторым шагом свертываем по k каждый из трех получившихся членов:

$$A^{ik} A_{ik} = (A^{11} A_{11} + A^{12} A_{12} + A^{13} A_{13}) + (A^{21} A_{21} + A^{22} A_{22} + A^{23} A_{23}) + (A^{31} A_{31} + A^{32} A_{32} + A^{33} A_{33}) .$$

Что полученное громоздкое выражение является инвариантом, то есть не зависит от системы координат, ничуть не «очевидно»… Но мы в этом уверены! Просто потому, что в результате двойной свертки все индексы пропадают. Следовательно, обязан получиться скаляр, не зависящий от принятых координат.

Как видим, выполнение простых правил оперирования индексами избавляет от трудоемких доказательств.

Впрочем, выражение очевидно: ведь строки (и столбцы) тензора это векторы, инвариант тензора это просто сумма инвариантов строк (или столбцов).

Разумеется, инвариантом комбинированного тензора A_i^k будет величина $A_i^k A_k^i$.

Метрический тензор

Завершив затянувшийся экскурс в общие вопросы, возвращаемся к тому, с чего все началось – к формуле для длины вектора (точнее, скалярного квадрата):

$$\mathbf{x}^2 = x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3 . \qquad (1.3)$$

Сейчас мы умеем записать ее в сокращенном виде:

$$\mathbf{x}^2 = x_i x^i . \qquad (1.3а)$$

Вспомним теперь, что:

$$x_i = g_{ik} x^k . \qquad (1.5)$$

Подставляя в (1.3а), имеем:

$$\mathbf{x}^2 = g_{ik} x^i x^k . \qquad (1.6)$$

Это общий вид тензорного выражения для длины, использующее контравариантные (естественные) компоненты.

Тензор g_{ik} есть метрический тензор пространства. *Метрический тензор* это (математически) как бы правило вычисления длины любого вектора по значениям его компонент. Применительно к (1.5) говорят, что здесь вектор x^i *свертывается* с метрическим тензором и получается вектор x_i. То есть метрический тензор это еще и способ преобразования компонент – от контравариантных к ковариантным и наоборот.

Теперь для выражения скалярного квадрата вектора мы теперь имеем ряд вариантов (на выбор):

$\mathbf{x}^2 = x_i x^i$;

$\mathbf{x}^2 = g_{ik} x^i x^k$;

$\mathbf{x}^2 = g^{ik} x_i x_k$.

Аналогично для скалярного произведения:

$\mathbf{xy} = x_i y^i$;

$\mathbf{xy} = g_{ik} x^i y^k$;

$\mathbf{xy} = g^{ik} x_i y_k$.

Упрощение тензора

Соотношение: $\mathbf{xy} = g_{ik} x^i y^k$ – запишем в два действия: сначала перемножим тензорно $Z^{ik} = x^i y^k$, получив тензор 2-го ранга; затем произведем двукратную свертку: $g_{ik} Z^{ik} =$ скаляр.

Получается, что можно любой тензор 2-го ранга превратить в скаляр, свернув его с метрическим тензором. В прямоугольных координатах – просто взять сумму элементов главной диагонали.

Для тензоров высоких рангов – аналогично можно понизить ранг на 2.

В подобных случаях говорят *об упрощении тензора*.

Свойства метрического тензора

Мы не утруждали себя вычислением составляющих метрического тензора, и потому кажется, что про их значения ничего сказать нельзя. Но это не так.

Во-первых, вспомним, что коэффициенты в выражении для длины мы (из соображений симметрии) вводили так, что $g_{ik} = g_{ki}$. Вот вам и первое свойство метрического тензора: его матрица *симметрична* (элементы, симметричные относительно главной диагонали, одинаковы).

Далее, в декартовых координатах $\mathbf{x}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$, то есть, между x^i и x_i нет разницы. Делаем второй вывод: именно здесь метрический тензор выглядит крайне просто:

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (1.7)$$

Члены со смешанными индексами $(i \neq k)$ в выражение для длины не входят! Итак, метрический тензор обычного евклидового пространства для случая прямоугольных координат является *диагональной матрицей*, причем все элементы главной диагонали равны единице.

Единичный тензор

Полезным понятием является *единичный тензор*, обозначаемый *символом Кронекера* δ_i^k. Он определяется так:

$$\delta_i^k x^i = x^k \qquad (1.8)$$

– для любого вектора *x*. Единичный тензор как бы выделяет желаемую (*k*-ю) компоненту вектора.

Слева записана сумма – раскроем ее:

$$\delta_i^k x^i = \delta_1^k x^1 + \delta_2^k x^2 + \delta_3^k x^3 = x^k .$$

Для выполнения равенства нужно, чтобы равнялась единице только та компонента δ_i^k, для которого $i = k$. А остальные должны быть нулевыми. Значит, единичный тензор выглядит точно как (1.7)!

Перейдем к другой системе координат, компоненты вектора изменятся. И единичного тензора тоже… Но то, что мы разъяснили относительно (1.8), остается, тем не менее, в силе!

Получается, что тензор δ_i^k обладает редким свойством: **его компоненты одинаковы в любой системе координат**, не изменяются.

2. Тензоры в релятивистской механике

В физике, в отличие от геометрии, существенно присутствует время, движение. В части перехода между системами координат – интерес представляют не столько системы с взаимно повернутыми осями, сколько системы, *взаимно движущиеся*.

Тензорный стиль формулировки специальной теории относительности вызван некоторой причиной: **временной промежуток, характеризующий пару событий, оказался неинвариантным** – при переходе к другой, движущейся системе координат. Это следствие опытов.

И в то же время опыты показывают, что физические законы действуют в указанных системах одинаково. Значит, законы должны допускать формулировку в тензорной форме, как не зависящей от конкретных координат. Из которой, как положено, вытекают некоторые инварианты – относительно переходов между движущимися системами координат. Системы координат будем полагать инерциальными.

Физические векторы и тензоры

Выше мы рассматривали вектор перемещения – он имеет чисто геометрическую природу. Но теперь мы переходим к векторам и тензорам физики.

Рассмотрим в качестве примера вектор скорости. Чтобы получить компоненты, надо представить его в виде линейной комбинации ортов пространства… но вот беда: геометрические орты имеют у нас другую размерность – размерность расстояния, а не скорости!

Впрочем, ведь мы имеем выражение, связывающее скорость с перемещением:

$$v^i(v^1, v^2, v^2) = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right) = \frac{dx^i}{dt}.$$

Скорость это вектор потому, что дифференцирование – линейная операция. А время t в нерелятивистской механике рассматривается как скаляр: оно инвариантно.

Компоненты вектора скорости в принятом базисе контравариантны (формально: так как контравариантный индекс в числителе).

Аналогично вводится контравариантный вектор ускорения:

$$a^i(a^1, a^2, a^3) = \left(\frac{dv^1}{dt}, \frac{dv^2}{dt}, \frac{dv^3}{dt}\right).$$

Рассмотрим вектор силы. Из формулы, связывающей ее с ускорением, имеем:

$$f^i = ma^i = \left(ma^1, ma^2, ma^3\right).$$

Здесь вектор силы оказывается в контравариантных компонентах, поскольку индекс i справа контравариантный (а масса m – скаляр).

Однако запишем формулу для силы в поле потенциала φ:

$\mathbf{f} = k\,\mathrm{grad}\,\varphi$ (коэффициент k зависит от природы поля).

И теперь вспомним, что вектор градиента $\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}$ ковариантен в базисе, в котором задано поле! Это видно и формально – из того, что **контравариантные компоненты стоят в знаменателе**. Значит, и вектор силы должен получиться здесь в ковариантных компонентах:

$$f_i = k\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, k\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, k\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right).$$

Приравнять его к ma^i будет формально неправильным. Придется свернуть с метрическим тензором пространства, получив корректное соотношение:

$$k\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}g^{ik} = ma^k.$$

Разумеется, в трехмерных декартовых координатах такое усложнение излишне. Однако в специальной теории относительности используется другое пространство, в котором различие контравариантного и ковариантного представления приходится учитывать.

Пространство СТО

Выяснилось, что **инвариантом является *интервал***. Он (точнее, его квадрат) определяется следующим образом:

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct)^2 - \mathbf{r}^2. \qquad (2.1)$$

Система координат x, y, z здесь декартова, а c – фундаментальная константа, имеющая размерность скорости. И, соответственно, являющаяся инвариантом.

Константу c часто называют *скоростью света*. Но правильнее сказать, что скорость света равна данной константе. Мы это покажем, хотя и нескоро.

Трехмерный вектор $\mathbf{r}$ выражает пространственную дистанцию события относительно начала отсчета, а величина ct – временнýю. В целом скаляр s выражает «расстояние» между *событиями*. Пространство, которое мы рассматриваем, это *пространство событий*.

Форма (2.1) напоминает скалярный квадрат, только знаки слагаемых необычные: **пространство релятивистской теории не евклидово, а псевдоевклидово**, вот в этом все дело.

Метрика 4-пространства

Форму (2.1), содержащую четыре квадратичных члена, удобно приписать четырехмерному пространству событий – *пространству Минковского* с координатами: ct, x, y, z. Применим к ним обозначения x^0, x^1, x^2, x^3, и тогда:

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \qquad (2.1б)$$

Но ведь в общем виде скалярный квадрат записывается:

$s^2 = g_{00}(x^0) + g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + g_{33}(x^3)^2$ (члены со смешанными индексами у нас отсутствуют). Сравнивая с (2.1б), где фигурируют минусы, получаем для 4-мерного метрического тензора:

$g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ (остальные компоненты нулевые). В матричной форме:

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$. Перед вами **метрический тензор 4-пространства**.

Если бы все элементы главной диагонали метрического тензора равнялись 1, разницы между ковариантным и контравариантным представлением не было бы. В наших же координатах (их называют *галилеевыми*) это не так! Вот потому и приходится брать в соображение тензорные примочки. Несмотря на то, что координаты 4-пространства прямоугольные.

Выразим интервал через координаты 4-вектора:

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^0x^0 - x^1x^1 - x^2x^2 - x^3x^3 .$$

Приведем это к стандартной форме скалярного квадрата:

$$s^2 = x^i x_i = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 \qquad (2.2)$$

Как всегда, квадрат длины это скалярное произведение вектора на ковектор.

Дифференциал интервала

В дальнейшем нам будет полезно выражение для дифференциала интервала. Из (2.2) очевидно:

$$ds^2 = dx^i dx_i = dx^0 dx_0 + dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + dx^3 dx_3 . \qquad (2.2a)$$

Но эта формула неудобна: ds не является полным дифференциалом. Ведь интервал это функция двух переменных – **r** и *t*, и при этом **r** тоже функция времени. Удобно выразить ds через одну независимую переменную *t*.

Простыми преобразованиями получаем:

$$ds = dt\sqrt{c^2 - \frac{dx^2}{dt^2} - \frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dz^2}{dt^2}} = dt\sqrt{c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2} = cdt\sqrt{1 - v^2/c^2} . \qquad (2.3)$$

Использованные обозначения, кажется, понятны без пояснений.

Внимание: *v* – не есть скорость какого-то конкретного объекта! Это просто отношение приращения линейного промежутка между событиями к временному промежутку, имеющее размерность скорости. Вполне возможна ситуация, когда $v > c$. Просто это будет соответствовать мнимому интервалу – как говорят, *пространственноподобному*.

Четырехвекторы

Итак, контравариантный геометрический вектор x^i от события *A* к событию *B* имеет компоненты: x^0, x^1, x^2, x^3. Здесь первую (точнее, нулевую) компоненту $x^0 = ct$ называют временнóй, остальные – пространственными. x^i это вектор в четырехмерном пространстве (только не евклидовом, а *псевдоевклидовом*), как говорят – *4-вектор*.

Вообще у любого 4-вектора СТО, какое бы физическое содержание он ни имел, **нулевую компоненту называют временной. Три остальные компоненты называют пространственными**. В совокупности последние образуют трехмерный вектор. Что принято условно изображать так: $x^i\ (x^0, \mathbf{x})$.

Конечно, трехмерный вектор **x** уже не имеет тензорных свойств относительно перехода между движущимися системами координат (не инвариантен).

Внимание: трехмерный вектор не сохраняет свои компоненты при переходе между системами координат. Изменяется временная компонента 4-вектора – значит, обязана измениться хотя бы одна пространственная. Он **не сохраняет даже длину** (если только это не тривиальный трехмерный поворот).

Сопоставляя $s^2 = x^0x^0 - x^1x^1 - x^2x^2 - x^3x^3$ и $s^2 = x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3$, выводим 4-вектор в ковариантных компонентах:

$x_i(x_0, x_1, x_2, x_3)$, где $x_0 = x^0$, $x_1 = -x^1$, $x_2 = -x^2$, $x_3 = -x^3$.

Внимание: для преобразования к ковариантным компонентам и обратно надо лишь поменять знаки перед всеми компонентами, кроме нулевой. Проверьте, что соблюдается классическое: $x_i = g_{ik}x^k$.

Между прочим, это позволяет установить, как выглядит в СТО *дуальный базис* (тот самый, в котором векторы приобретают свои ковариантные компоненты). Он отличается от главного базиса просто сменой направлений пространственных осей на противоположные (а временная ось не меняется).

Собственное время

Рассмотрим теперь движение некоторого тела. Если промежуток времени невелик, движение можно считать инерциальным. В системе отсчета, связанной с данным телом, оно покоится. Так что интервал между двумя близкими событиями из жизни этого тела – это только промежуток времени по часам, связанным с телом:

$$ds^2 = dx^0 dx_0 = c^2 d\tau^2 .$$

Величину τ называют собственным временем тела.

Но в любой другой системе отсчета интервал имеет и временные, и пространственные компоненты, так что:

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = dx^0 dx_0 + dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + dx^3 dx_3 = dx^i dx_i ,$$

$d\tau^2 = \dfrac{1}{c^2} dx^i dx_i$ – можно рассматривать как **основное уравнение релятивистской кинематики**.

Из $d\tau = \dfrac{ds}{c}$ вроде бы следует, что $\tau = \dfrac{1}{c}\int ds$, но это выражение бесполезно: как мы отмечали, ds не есть полный дифференциал, и интеграл будет зависеть от пути интегрирования (мировой линии).

Однако у нас есть формула $ds = cdt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (2.4), поэтому можно проинтегрировать по времени:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt$$

– собственное время тела, при условии, что в некоторой другой системе отсчета протек промежуток времени $t_2 - t_1$. Как видно, если $|v| > 0$, то всегда $\tau < t_2 - t_1$.

Преобразования координат

Компоненты 4-вектора при переходе к другой (движущейся со скоростью **v**) системе координат обязаны изменяться таким образом, чтобы квадрат вектора (квадрат интервала) оставался неизменным:

$$ct'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2 .$$

Легко проверить (простой подстановкой), что этому условию удовлетворяют преобразования:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (2.4)$$

Они называются *преобразованиями Лоренца.*

Внимание: всегда можно повернуть оси координат таким образом, что относительная скорость систем координат будет направлена вдоль оси *X*!

В точности **по этим же формулам преобразуются компоненты вообще любого 4-вектора** СТО x^i (примеры их мы рассмотрим далее). Говорят, что такие векторы *лоренц-инвариантны*. Только, с учетом того, что $x^0 = ct$, формулы записывают в общем виде так:

$$x'^1 = \frac{x^1 - \frac{v}{c}x^0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \; x'^2 = x^2, \; x'^3 = x^3, \; x'^0 = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (2.5)$$

Заметим, что взаимная скорость систем отсчета v всегда меньше c.

Вообще все величины, которые можно представить в 4-мерном виде, являются лоренц-инвариантными без какой-либо дополнительной проверки. А физические законы, записанные в 4-мерной форме, *лоренц-ковариантны*, то есть, выглядят одинаково в любой инерциальной системе отсчета.

Четырехскорость

Перейдя к четырехмерным формулировкам, мы отказались рассматривать чисто пространственное перемещение. Тогда и обычная скорость нас тоже не устраивает! В самом деле, в $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ **время уже не является инвариантной переменной**, одинаковой в любой системе координат. Теперь время это просто одна из координат 4-вектора перемещения. То есть не скаляр!

Чтобы получить 4-векторную величину, аналогичную скорости, следует дифференцировать по некоторой другой переменной, инвариантной в 4-пространстве – скаляру. Такой величиной является интервал.

Из указанных соображений вектор 4-скорости определяют так:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}. \qquad (2.6)$$

Из соотношения (2.2а) $ds^2 = dx^0 dx_0 + dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + dx^3 dx_3$ выводим (поделив на ds^2):

$$\frac{dx^0}{ds}\frac{dx_0}{ds} + \frac{dx^1}{ds}\frac{dx_1}{ds} + \frac{dx^2}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \frac{dx^3}{ds}\frac{dx_3}{ds} = 1.$$

Учитывая (2.6), имеем:

$$u^0 u_0 + u^1 u_1 + u^2 u_2 + u^3 u_3 = 1.$$

То есть длина вектора 4-скорости всегда равна единице. Странно? Ничуть, так и должно быть, длина любого 4-вектора это скаляр, инвариант.

4-скорость – величина безразмерная, ведь интервал имеет размерность пространственного расстояния.

Можно выразить компоненты 4-скорости через привычные трехмерные величины:

$u^0 = \frac{d(ct)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ – тут просто использовано (2.3). Теперь v уже реальная скорость некоторого объекта, ведь мы рассматриваем пространственный и временной промежутки, характеризующие движение заданной точки.

Столь же легко получаем:

$$u^1 = \frac{v_x}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \; u^2 = \frac{v_y}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \; u^3 = \frac{v_z}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Три пространственные компоненты можно объединить в трехмерный вектор:

$$u^i = (u^0, \mathbf{u}) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \qquad (2.6а)$$

Отметим, что, трехмерной скорости $v \geq c$ не соответствует никакая 4-скорость. Это характеристика движения только вещественных тел!

Иногда 4-скоростью считают величину $c\dfrac{dx^i}{ds}$ – в этом случае она получает привычную размерность, а модуль вектора всегда равен c. Что дает возможность наглядной трактовки: любое тело (материальная точка) движется в пространстве-времени со скоростью, по абсолютной величине равной c, а компоненты обычной скорости это просто трехмерные проекции, «тени» вектора 4-скорости.

Преобразования скорости

Компоненты вектора 4-скорости u объекта (как и любого 4-вектора) при переходе к другой системе отсчета, движущейся со скоростью V, преобразуются по (2.5):

$$u'^1 = \frac{u^1 - \frac{V}{c} u^0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad u'^0 = \frac{u^0 - \frac{V}{c} u^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Здесь взаимная скорость систем отсчета обозначена V, чтобы не путать со скоростью объекта v, которой мы занимаемся.

Осталось перейти от 4-скорости u' с обычной «трехмерной» скорости v'. Здесь можно потонуть в выкладках, а для упрощения заметим, что из (2.6а) эту скорость можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{v} = c\frac{\mathbf{u}}{u^0}.$$

Отсюда, к примеру, компонента скорости вдоль оси x равна:

$$v'^1 = c\frac{u'^1}{u'^0} = c\frac{u^1 - Vu^0/c}{u^0 - Vu^1/c} = \frac{v^1 - V}{1 - v^1 V/c^2}.$$

Собственно, формулы знакомы по литературе.

Но формулы преобразования скоростей можно вывести, не прибегая к 4-скорости – что даже и правильнее. Потому что тогда будет ясно, что они справедливы для любых величин скорости, в том числе и больших, чем c (хотя 4-скорости в таком случае оказываются мнимыми).

Из полученной нами формулы легко увидеть: если скорость меньше c, то она останется меньше и в любой другой системе отсчета. То же – если скорость больше c.

Вот курьезная (и в то же время совершенно серьезная!) задачка на тему. Световой зайчик движется вдоль оси x со скоростью $1000c$. С какой скоростью должен двигаться вдоль той же прямой наблюдатель, чтобы «перегнать» зайчик, оставив его за спиной?

4-вектор энергии-импульса

Известное из школы выражение для импульса тела: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (m – масса) является трехмерным, и, следовательно, неивариантным: абсолютная величина импульса при переходе к движущейся системе координат не сохраняется. Чтобы получить четырехмерную конструкцию, на место скорости ставим 4-скорость. Ну а с массой все в порядке: это скаляр.

Впрочем, возможно, вы читали, что масса движущегося тела возрастает? Это архаичный взгляд, о котором пора забыть…

4-скорость безразмерна, поэтому для преемственности домножают на c. В итоге для импульса имеем:

$$p^i = mcu^i.$$

Так как $u^i u_i = 1$, то:

$$p^i p_i = m^2 c^2.$$

Собственно говоря, это **основное уравнение релятивистской динамики**. Осталось разобраться, что оно означает.

Подставив компоненты 4-скорости, легко расписываем компоненты 4-импульса:

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\ p^1 = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\ p^2 = \frac{mv_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\ p^3 = \frac{mv_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Ну и, как всегда, пространственные компоненты можно объединить теперь под эгидой трехмерного вектора:

$$p^i = (p^0, \mathbf{p}) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \qquad (2.7)$$

При малых скоростях имеем привычную формулу:

$\mathbf{p} = \dfrac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m\mathbf{v}$. Значит, 4-вектор введен корректно.

Мы без труда получили две вещи:

1) релятивистскую формулу для трехмерного импульса: $\mathbf{p} = \dfrac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$;

2) 4-вектор импульса, имеющий еще и некоторую загадочную временную компоненту p^0. Займемся ею.

При малых скоростях данная составляющая равна:

$$\frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx mc\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) = mc + \frac{mv^2}{2c} = \frac{1}{c}\left(mc^2 + \frac{mv^2}{2}\right).$$

В скобках оказалась *полная энергия* E, состоящая из двух слагаемых:

1) энергия покоя, равная mc^2;

2) кинетическая энергия (для малых скоростей равная $\dfrac{mv^2}{2}$).

Теперь окончательно ясен физический смысл компонент 4-вектора импульса. Это полная энергия E (с точностью до коэффициента) и три компоненты импульса:

$$p^i(\mathsf{E}/c, \mathbf{p}).$$

Отсюда название: *4-вектор энергии-импульса*.

Напомню, что квадрат его равен m^2c^2. То есть:

$$\frac{\mathsf{E}^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2. \qquad (2.8)$$

Получили фундаментальное уравнение релятивистской динамики, выраженное уже через привычные величины.

Сопоставляя два члена в (2.7):

$$\frac{\mathsf{E}}{c}=\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \text{ и } \mathbf{p}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

получаем и вторую важную формулу:

$$\mathsf{E}=\frac{pc^2}{v}.$$

Энергия покоя и кинетическая энергия

Как мы отметили, полная энергия вещественного тела $\mathsf{E}=\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ состоит из двух слагаемых:

1) кинетическая энергия, связанная с движением тела как целого;

2) энергия покоя mc^2, включающая любую внутреннюю энергию и связанная с внутренним движением.

Строго говоря, *энергия покоя* взялась выше неизвестно откуда. Она понадобилась, чтобы образовать 4-вектор энергии-импульса – для стройности картины. Вообще в физике энергия задана с точностью до константы, и важно только изменение энергии… Тем не менее, принятие энергии покоя оказывается логичным – что мы еще увидим впоследствии.

Поскольку энергия покоя эквивалентна массе, можно утверждать, что масса тела возрастает при его нагревании, при подъеме в гравитационном поле, и т. п. (А вот от скорости масса не зависит).

Действительно, рассмотрим замкнутый объем, в котором хаотически движутся частицы массой m со скоростью v. Их общая энергия равна $\mathsf{E}=N\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, где N – количество частиц. А импульс всей системы равен нулю (импульсы частиц взаимно компенсируются). Значит, указанная энергия является *энергией покоя* системы Mc^2. Отсюда масса системы:

$M=N\dfrac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ – больше простой суммы масс частиц Nm!

Получили прирост массы за счет внутренней энергии (например, нагревания). И заодно иллюстрацию того, **что масса не аддитивна** (ведь масса каждой частицы равна m).

Теперь о *кинетической энергии*. Очевидно, что она равна разности полной энергии и энергии покоя:

$$E_k=\mathsf{E}-mc^2=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-mc^2=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right).$$

При $v \ll c$ нетрудно получить знакомое по школе $\dfrac{mv^2}{2}$.

Мы привыкли говорить, что энергия это скалярная величина. Но, как видим, ни полная, ни кинетическая энергия скаляром не являются, так как неинвариантны. А вот энергия покоя – действительно, скаляр.

4-сила

Ее можно ввести по аналогии с трехмерным случаем $\mathbf{f}=\dfrac{d\mathbf{p}}{dt}$. Но для 4-вектора принимаем уже:

$f^i = \dfrac{dp^i}{ds}$. Как и ранее, используя (2.3), легко получается:

$$f^i = \left(\frac{d\mathsf{E}}{dt} \cdot \frac{1}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \qquad (2.9)$$

Здесь, как всегда, **f** это обычный трехмерный вектор силы.

Кстати, $\dfrac{d\mathsf{E}}{dt} = \mathbf{fv}$ это мощность, вот вам и физический смысл нулевой компоненты 4-силы!

Теперь подставим в $f^i = \dfrac{dp^i}{ds}$ определение 4-импульса: $p^i = mcu^i$. Получим:

$$f^i = mc\frac{du^i}{ds}. \qquad (2.10)$$

Перед нами аналог знакомой формулы: $\mathbf{f} = m\mathbf{a} = m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$. Производная $\dfrac{du^i}{ds}$ это *4-ускорение*. А множитель *c* появляется в связи с уравниванием размерностей.

Еще раз увидели, как знакомые трехмерные векторы превращаются в 4-векторы. А в качестве нулевой компоненты последнего выступает некоторый «скаляр». В кавычках, потому что в 4-пространстве он скаляром не является.

В качестве несложного самостоятельного упражнения предлагается доказать, что «четырехмерная работа» $dA = f^i dx_i$ всегда равна нулю (это можно сделать по меньшей мере двумя способами).

3. Антисимметричные тензоры

Из предыдущего раздела можно опрометчиво заключить, что любая вообще физическая величина, традиционно изображаемая вектором, превращается в 4-пространстве в «пространственную» часть 4-вектора. А роль временной компоненты играет некоторая «скалярная» величина.

Но это не так – не любая!

Например, есть конструкции, очень похожие на вектор… кроме одной мелочи. Почти незаметной в трехмерном пространстве.

Тем и хорош тензорный подход, что с легкостью выявляет совсем другую природу подобных объектов.

Альтернация

Над двумя векторами можно, как известно, произвести бинарные операции скалярного и тензорного перемножения. Существует и еще одна операция, имеющая немалую важность – *альтернация*.

Речь идет об операции, которая в инвариантной записи выглядит так:

$$Z^{ik} = x^i y^k - x^k y^i .$$

Результатом альтернации является тензор второго ранга (который, кстати, при $x = y$ равен нулю).

Развернуто он выглядит так:

$$Z^{ik} = \begin{bmatrix} x^1y^1 - x^1y^1 & x^1y^2 - x^2y^1 & \dots & x^1y^n - x^ny^1 \\ x^2y^1 - x^1y^2 & x^2y^2 - x^2y^2 & \dots & x^2y^n - x^ny^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^ny^1 - x^1y^n & x^ny^2 - x^2y^n & \dots & x^ny^n - x^ny^n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & x^1y^2 - x^2y^1 & \dots & x^1y^n - x^ny^1 \\ x^2y^1 - x^1y^2 & 0 & \dots & x^2y^n - x^ny^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^ny^1 - x^1y^n & x^ny^2 - x^2y^n & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

Тензор Z^{ik} обладает примечательными свойствами:

1) сумма компонент, симметричных относительно главной диагонали (то есть, таких, что у них переставлены местами индексы – например, $Z^{12} + Z^{21}$), равна нулю;

2) компоненты главной диагонали (естественно) равны нулю;

3) в n-мерном пространстве тензор имеет всего $\frac{n(n-1)}{2}$ независимых ненулевых компонент – из общего числа n^2.

Подобные тензоры называются *антисимметричными*, или кососимметричными. Антисимметричные тензоры играют исключительную роль в физике!

Антисимметричный тензор 2-го ранга, если он не тождественно нулевой, невозможно получить просто в виде произведения двух векторов. Действительно, поскольку $Z^{11} = 0$, первая компонента хотя бы одного из предполагаемых сомножителей должна быть нулевой. Но тогда вся строка или столбец Z^{ik} должны целиком заполниться нулями… ну и так далее.

Векторное произведение. Псевдовекторы

Для случая $n=3$ представим тензор (3.1) следующим образом:

$$Z^{ik}=x^i y^k - x^k y^i = \begin{bmatrix} 0 & -z_3 & z_2 \\ z_3 & 0 & -z_1 \\ -z_2 & z_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь мы просто обозначили: $z_1 = x^3y^2 - x^2y^3$, $z_2 = x^1y^3 - x^3y^1$, $z_3 = x^2y^1 - x^1y^2$. Напрашивается мысль, что $\mathbf{z}(z_1, z_2, z_3)$ это вектор.

Трехмерный антисимметричный тензор Z^{ik} имеет всего три независимых компоненты, и в каком-то смысле эквивалентен просто вектору. Будем говорить, что вектор **z** *дуален* тензору Z^{ik}.

Вектор **z** проистекает из двух исходных векторов – **x** и **y**. И, несомненно, вы узнали в нем *векторное произведение*: $\mathbf{z}=[\mathbf{xy}]$.

На самом деле мы пока не уверены, является ли **z** вектором! Впрочем, при повороте координатных осей он преобразуется как обычный вектор. И, однако…

$\mathbf{x}(x^1, x^3, x^3)$ и $\mathbf{y}(y^1, y^3, y^3)$ – заведомо истинные векторы. Изменим направление одного из ортов системы координат (например, первого) на противоположное. Ясно, что компоненты x^1 и y^1 изменят свой знак (а остальные нет).

А вектор **z** изменит свои компоненты по другой схеме (проследите!) Изменятся знаки у z_2 и z_3 (а z_1 не изменится). Противоположно обычному вектору!

Если же поменять направления *двух* любых ортов, то разницы в поведении компонент не будет – проверьте.

Внимание: отличие z от истинного вектора проявляется тогда, когда имеет место «зеркальное отражение» базиса, не сводимое к поворотам.

Итак, вектор, являющийся результатом векторного произведения, не является истинным вектором. Он не инвариант в полном смысле. Это *псевдовектор*, или *аксиальный вектор*. Истинные же векторы называют еще *полярными*.

Трехмерному антисимметричному тензору всегда можно сопоставить дуальный ему псевдовектор.

Псевдотензоры

Псевдовектор $\mathbf{z}=[\mathbf{xy}]$ у нас выскочил, как некий фокус. Ясно же, что бинарная операция над двумя векторами не может образовать вектор – просто по счету индексов. Она даст либо скаляр (свертка), либо тензор 2-го ранга (перемножение).

Вектор мог бы получиться как результат операции с участием тензора 2-го ранга:

$$z_i = X_{ik}y^k. \qquad (3.2)$$

Структуру X_{ik} несложно подобрать, вот она:

$$X_{ik}=\begin{bmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.3)$$

В самом деле, получим, для примера, z_1, пользуясь (3.2):

$z_1 = X_{11}y^1 + X_{12}y^2 + X_{13}y^3 = 0 - x^3y^2 + x^2y^3$ – как и должно быть.

Итак, векторное произведение возможно получить обычной сверткой. Только на место первого сомножителя x^i надо подставить некоторый тензор X_{ik}, составленный из компонент вектора x^i. Назовем его *дуальным* вектору x^i. Конечно, вы узнали в нем знакомую структуру трехмерной антисимметрии. Тензор, дуальный вектору, антисимметричен.

Впрочем, так как z_i не является истинным вектором, можно заподозрить, что и X_{ik} не является истинным тензором. Так оно и есть.

Правда, при повороте координатных осей X_{ik} преобразуется как обычный тензор. И, однако, если поменять направление одного из координатных ортов (или трех), некоторые компоненты X_{ik} поменяют знак… но противоположно тому, как это происходит у истинного тензора!

Отличие X_{ik} от истинного тензора проявляется тогда, когда имеет место «зеркальное отражение» базиса, не сводимое к поворотам. Подобный объект называется *псевдотензором*.

Обычному (истинному, полярному) вектору всегда можно сопоставить дуальный ему псевдотензор. А аксиальному вектору (псевдовектору) – сопоставить дуальный истинный тензор. Напомним, что все это справедливо только в трехмерном пространстве.

Псевдотензор Леви-Чивиты

Все равно получается, что дуальный тензор X_{ik} как бы падает с неба… И теория векторного произведения не имеет под собой почвы. Разве что вспомнить известное геометрическое определение с синусом угла, но этот сюжет мы пока отложим.

На самом деле, формальное определение существует. Дуальный тензор X_{ik} формально получается из «вектора-хозяина» x^l таким образом:

$$X_{ik} = e_{ikl}x^l.$$

Тензор e_{ikl} знаменит, и имеет особое название: *совершенно антисимметричный единичный тензор*, или *псевдотензор Леви-Чивиты*. В данном случае он имеет 3-й ранг (а вообще его ранг соответствует числу измерений пространства). Изобразить трехмерную матрицу тензора на бумаге – дело кропотливое, да и нет особого смысла. Попробуем просто понять ее свойства.

Для чего не поленимся расписать нашу свертку (3.2): $z_i = X_{ik}y^k = e_{ikl}x^iy^k$ – для, например, 1-й компоненты векторного произведения:

$$z_1 = e_{111}x^1y^1 + e_{121}x^2y^1 + e_{131}x^3y^1 + e_{112}x^1y^2 + e_{122}x^2y^2 + e_{132}x^3y^2 + e_{113}x^1y^3 + e_{123}x^2y^3 + e_{133}x^3y^3.$$

Но ведь должно получиться: $z_1 = x^2y^3 - x^3y^2$. Следовательно, из имеющихся компонент e_{ikl} – не равны нулю только e_{123} и e_{132}. Причем: $e_{123} = 1$ а $e_{132} = -1$.

Рассматривая аналогично остальные компоненты векторного произведения, установим пару интересных фактов.

1) У тензора e_{ikl} не равны нулю только компоненты, для которых все три индекса разные (а таких всего $3! = 6$ из общего количества $3^3 = 27$). Эти компоненты равны 1 либо -1.

2) Сумма двух компонент e_{ikl}, таких, что у них переставлена местами пара индексов (например, $e_{123} + e_{132}$), равна нулю. Как мы знаем, это свойство называется *антисимметричностью*. В данном случае – *абсолютной* или *совершенной* (поскольку указанное справедливо для любых индексов, а не для какой-то одной пары).

Тензор e_{ikl} не меняется при переходе к другим координатам. Впрочем, это свойство любого антисимметричного тензора с рангом, соответствующим размерности пространства.

Для чего нужны псевдовекторы

Мы говорили, что псевдовектор (аксиальный вектор) при смене осей координат, не связанной с зеркальным отражением, преобразуется точно так же, как положено настоящему вектору. Но никак это не доказали.

Доказать несложно. Если x^i это псевдовектор, ему соответствует дуальный истинный тензор:

$$X_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Такой тензор имеет инвариант: $X_{ik}X^{ik}$. В декартовых координатах (мы его когда-то расписывали) это сумма квадратов всех компонент.

Отсюда следует, что $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ инвариант. Но данная величина соответствует длине вектора x^i!

Длина псевдовектора инвариантна, значит, его компоненты преобразуются по тому же закону, что и компоненты истинного (покуда мы не вдаемся в их знаки). Именно это позволяет оперировать аксиальными векторами до определенного предела точно так же, как истинными: ведь это проще, чем работать с тензорами, а результат тот же. Вот для чего нужны аксиальные векторы.

Но учитывая их особенность, которую отметили выше!

Там, где она несущественна, говорят просто о векторах. Не уточняя, что (к примеру) вектор угловой скорости это аксиальный вектор.

Антисимметричный 4-тензор

Зная в принципе структуру антисимметричного тензора, сконструируем антисимметричный 4-тензор 2-го ранга. Вот его общий вид (с произвольными буквенными обозначениями):

$$A^{ik} = \left[\begin{array}{c:ccc} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hdashline -\alpha & 0 & \delta & \varepsilon \\ -\beta & -\delta & 0 & \xi \\ -\gamma & -\varepsilon & -\xi & 0 \end{array}\right].$$

Разобьем тензор на части, как показано штриховыми линиями. И сразу кое-что замечаем!

Во-первых, правый нижний квадрат это тоже антисимметричный тензор, только трехмерный. Запишем его в такой форме:

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \text{(принимая } a_1 = -\xi,\ a_2 = \varepsilon,\ a_2 = -\delta\text{)}.$$

Вспомнив (3.3), заключаем, что a_1, a_2, a_3 это компоненты некоторого аксиального вектора **a**: тензор дуален псевдовектору.

Во-вторых, верхняя и левая части соответствуют некоторому другому (полярному) трехмерному вектору **p**. Принимая: $p_1 = \alpha$, $p_2 = \beta$, $p_3 = \gamma$, получаем наш тензор в окончательном виде:

$$A^{ik} = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ -p_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ -p_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ -p_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.4)$$

Антисимметричный вектор нередко записывают в компактном виде:

$$A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a}) \qquad (3.5)$$

– имея в виду, что компоненты A^{ik} по сути дела являются просто компонентами тех самых векторов $\mathbf{p}, \mathbf{a}$.

Примем на веру (просто дабы не отвлекаться), что тот же тензор в ковариантных компонентах будет выглядеть:

$$A_{ik} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a}). \qquad (3.5а)$$

Векторные компоненты 4-тензора

Итак, внутри антисимметричного 4-тензора мы как бы нашли два трехмерных вектора. Имеет ли этот фокус какой-то практический смысл? Да, и это обнаруживается при свертке тензора A^{ik} с некоторым 4-вектором x_k: $A^{ik}x_k$.

Запишем, например, 0-ю компоненту искомой свертки:

$$A^{0k}x_k = A^{00}x_0 + A^{01}x_1 + A^{02}x_2 + A^{03}x_3 = 0 + p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3.$$

Да ведь это просто скалярное произведение:

$$\mathbf{px}. \qquad (3.6а)$$

Здесь **x** – пространственная часть 4-вектора x_k.

Теперь распишем 1, 2 и 3 компоненты свертки:

$$A^{1k}x_k = A^{10}x_0 + A^{11}x_1 + A^{12}x_2 + A^{13}x_3 = -p_1x_0 + 0 + a_3x_2 - a_2x_3,$$

$$A^{2k}x_k = A^{20}x_0 + A^{21}x_1 + A^{22}x_2 + A^{23}x_3 = -p_2x_0 - a_3x_1 + 0 + a_2x_3,$$

$$A^{3k}x_k = A^{30}x_0 + A^{31}x_1 + A^{32}x_2 + A^{33}x_3 = -p_3x_0 + a_2x_1 - a_2x_2 + 0.$$

Явно опознаются компоненты векторного произведения, так что три строки легко объединить в одну:

$$-x_0\mathbf{p} - [\mathbf{ax}]. \qquad (3.6б)$$

Итак, 4-вектор – результат свертки антисимметричного 4-тензора с 4-вектором – удобно раскладывается на два выражения, содержащие трехмерные векторы:

$$A^{ik}x_k = (\mathbf{px}, \quad -x_0\mathbf{p} - [\mathbf{ax}]). \qquad (3.7)$$

Это нам пригодится далее, при физической интерпретации четырехмерных выражений.

В составе истинного тензора обнаружилось векторное произведение. Странно? Но ведь оно является здесь истинным вектором, а не псевдовектором. Так как входящий в него сомножитель **a** – уже псевдовектор.

Внимание: векторы p и a не являются пространственными частями каких-либо 4-векторов. Это – векторы относительно только чисто пространственных преобразований координат… Но в общем случае 4-мерных поворотов – не преобразуются как векторы. Они представляют собой как бы (соответственно) временную и пространственную части 4-тензора.

4. Тензоры в электродинамике

Теория относительности родилась в значительной мере из проблемы инвариантной записи уравнений электродинамики. Опыт показывает, что электромагнитные явления в любой системе координат происходят совершенно одинаково, следовательно, инвариантная формулировка законов должна существовать. Проблема исчерпывающе решена на базе тензорного аппарата.

Задача последующих разделов не в том, чтобы предложить собственный вариант изложения основ электродинамики. Цель иная: показать, как многого можно достичь, применяя тензорный аппарат.

Сила Лоренца

Электромагнитное поле принято (исторически) разделять на две составляющие: *электрическое* поле (действующее на заряд силой, не зависящей от его движения), и *магнитное* (действующее силой, пропорциональной скорости заряда). Уравнение *силы Лоренца* является фактическим определением этих полей, и выглядит так:

$$\mathbf{f} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]. \qquad (4.1)$$

Здесь векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ представляют электрическое и магнитное поля, $\mathbf{v}$ – скорость движения заряда величины e. Квадратные скобки – векторное произведение. Как принято в теории поля, используется удобная Гауссова система единиц.

Первый член правой части отображает воздействие на заряженную частицу электрического поля. Второй член – действие магнитного поля, проявляющееся только при движении заряда (когда $v \neq 0$).

Уравнение выглядит на первый взгляд неинвариантным. Действительно, если перейти в систему координат, в которой заряд покоится, то магнитное поле действовать на него не должно. Но сила-то никуда не девается!

Чтобы подойти к четырехмерной формулировке, заменим векторы силы и скорости – на «пространственные» части, соответственно, 4-силы и 4-скорости. Просто разделим уравнение (4.1) на $c\sqrt{1-v^2/c^2}$:

$$\frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{e}{c}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\mathbf{E} + \frac{e}{c}\left[\frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\mathbf{H}\right].$$

Слева записана теперь пространственная часть 4-силы $mc\dfrac{d\mathbf{u}}{ds}$ – смотрите (2.9), (2.10). В крайнем правом члене обнаруживается пространственная часть 4-скорости: $\dfrac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} = \mathbf{u}$ (2.6а). А в среднем – временная часть 4-скорости $\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = u^0$. Все это дает право записать:

$$mc\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{e}{c}\left(u^0\mathbf{E} + [\mathbf{uH}]\right) = \frac{e}{c}\left(u^0\mathbf{E} - [\mathbf{Hu}]\right). \qquad (4.2)$$

Для тех, кто подзабыл, напоминаю: векторное произведение не коммутативно, при перестановке сомножителей оно меняет знак.

Выражение в скобках напоминает что-то знакомое! Это же (3.6б) – пространственная часть 4-вектора, являющегося **произведением некоторого антисимметричного 4-тензора на 4-вектор** u_i.

Обозначим этот (пока неизвестный) тензор: F^{ik}.

Тензор поля

Запишем формально уравнение силы Лоренца через 4-тензор – просто по аналогии с (3.7):

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k. \qquad (4.3)$$

Надо лишь понять структуру антисимметричного тензора F^{ik}. Это сделать несложно – просто сопоставляя (3.6), (3.6б) и (4.2). Очевидно, что в (4.2) роль **a** выполняет **H**, а роль **p** – минус **E**, так что:

$$F^{ik} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H}).$$

F^{ik} называют *тензором электромагнитного поля*. Сопоставляя с (3.4), можно изобразить матричную структуру тензора поля в координатах x, y, z:

$$F^{ik} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}. \qquad (4.4)$$

Если мы убедимся, что (4.3) справедливо (а мы в этом ниже убедимся!)… то выясняется, что **поле в электродинамике имеет тензорную природу**. А представление полей (отдельно электрического и магнитного) в виде трехмерных векторов допустимо лишь, пока и поскольку мы не переходим в «движущуюся» систему координат.

Заметим, что тензор:

$$\begin{bmatrix} 0 & -H_z & H_y \\ H_z & 0 & -H_x \\ -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}$$

– является антисимметричным истинным тензором (как часть истинного тензора). Однако он дуален вектору **H**. Следовательно, **вектор магнитного поля это аксиальный вектор (псевдовектор)**.

4-сила Лоренца

Пока что запись (4.3) гипотетическая; впрочем, для «пространственной» части F^{ik} она уже проверена. Осталось рассмотреть «временную» часть:

$$mc\frac{du^0}{ds} = \frac{e}{c}F^{0k}u_k. \qquad (4.5)$$

Временная компонента 4-силы (левая часть уравнения) нам известна – смотрите (2.9). Она равна $\dfrac{d\mathsf{E}}{dt}\cdot\dfrac{1}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Ну а произведение $F^{0k}u_k$, учитывая антисимметричность F^{ik}, мы записываем по аналогии с (3.6а):

$$F^{0k}u_k = -\mathbf{Eu}\ .$$

Остается только выразить 4-скорость через обычную скорость: $\mathbf{u} = -\dfrac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Внимание: знак минус получается оттого, что 4-вектор u_k в (4.5) ковариантен! Как мы знаем, при переходе от контравариантного 4-вектора к ковариантному меняется знак пространственной части.

В итоге вместо (4.5) получаем:

$$\frac{d\mathsf{E}}{dt}\cdot\frac{1}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{e}{c}\cdot\frac{\mathbf{Ev}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\ ,$$

или:

$$d\mathsf{E} = e\mathbf{Ev}dt = e\mathbf{E}d\mathbf{r}\ .$$

Имеем здесь обычное уравнение **работы, произведенной силой электрического поля** при перемещении заряда на $d\mathbf{r}$. Напомню, что **магнитное поле не производит работы над зарядом**: его сила (по правилу векторного произведения) всегда ортогональна скорости.

Таким образом, временная компонента 4-силы также имеет физический смысл. Значит, представление силы Лоренца в четырехмерной форме правомерно, и отражает реально имеющую место инвариантность явлений.

Преобразование Лоренца для тензора

Полезно узнать, каким образом преобразуются компоненты 4-тензора 2-го ранга при переходе в другую систему отсчета. Начнем с тензора, который является произведением двух 4-векторов:

$$F^{ik} = a^i b^k = \begin{bmatrix} a^0b^0 & a^0b^1 & a^0b^2 & a^0b^3 \\ a^1b^0 & a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^0 & a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^0 & a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{bmatrix}.$$

Как обычно, считаем, что относительная скорость систем координат направлена вдоль оси x^1 . Для каждого из 4-векторов a^i и b^k справедливы преобразования Лоренца (2.5). Тогда легко сообразить, что все компоненты с индексами только 2 и 3 – не изменятся (таких компонент четыре).

Компонента a^0b^1, к примеру, преобразуется так:

$$F'^{01} = a'^0\, b'^1 = \frac{a^0 - \frac{v}{c}a^1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cdot\frac{b^1 - \frac{v}{c}b^0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{F^{01} - \frac{v}{c}F^{11} - \frac{v}{c}F^{00} + \frac{v^2}{c^2}F^{10}}{1-v^2/c^2}\ .$$

Компонента a^0b^2 преобразуется так:

$$F'^{02} = a'^0\, b'^2 = \frac{a^0 - \frac{v}{c}a^1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}b^2 = \frac{F^{02} - \frac{v}{c}F^{12}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ .$$

Делая и дальше аналогичные преобразования, получим следующий тензор для F'^{ik} :

$$\begin{bmatrix} \ldots & \dfrac{F^{01} - v/c \cdot F^{11} - v/c \cdot F^{00} + v^2/c^2 \cdot F^{10}}{1 - v^2/c^2} & \dfrac{F^{02} - v/c \cdot F^{12}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & \dfrac{F^{03} - v/c \cdot F^{13}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \ldots & \ldots & \dfrac{F^{12} - v/c \cdot F^{02}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & \dfrac{F^{13} - v/c \cdot F^{23}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & F^{23} \\ \ldots & \ldots & F^{32} & \ldots \end{bmatrix}.$$

Мы знаем, что и произвольный тензор преобразуется при переходе к другим координатам таким же образом.

Преобразование компонент поля

Кажется, странно: почему не все ячейки матрицы заполнены?

Потому, что нас интересует здесь преобразование антисимметричного тензора (тензора поля). Такой тензор, как известно, является разностью двух «обычных» тензоров. Так как преобразования Лоренца линейны, то формулы справедливы и для случая антисимметрии.

Однако здесь все проще (потому-то мы и сэкономили на излишних вычислениях). Во-первых, диагональ нулевая, $F^{ii} = 0$. Во-вторых, можно учесть свойство антисимметрии: $F^{ik} = -F^{ki}$. В-третьих, с учетом первого и второго, F'^{01} превращается просто в F^{01}. Преобразованный тензор выглядит теперь так:

$$\begin{bmatrix} 0 & F^{01} & \dfrac{F^{02} - v/c \cdot F^{12}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & \dfrac{F^{03} - v/c \cdot F^{13}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \ldots & 0 & \dfrac{F^{12} - v/c \cdot F^{02}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & \dfrac{F^{13} - v/c \cdot F^{23}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \ldots & \ldots & 0 & F^{23} \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь мы опять опустили антисимметричные компоненты.

Осталось сравнить с (4.4) и выписать формулы преобразования Лоренца для E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z. Мы не будем тратить место на то, что можно сделать самостоятельно, или найти результат в учебнике.

Инварианты тензора поля

Тензорное представление физических величин полезно тем, что можно легко выявить инварианты, которые отнюдь не лежат на поверхности. Инвариант для тензора поля записываем, как и для любого тензора 2-го ранга: $F^{ik}F_{ik}$. Подобную свертку нам уже доводилось проводить, воспользуемся готовым результатом, подставив значения компонент:

$$F^{ik}F_{ik} = -(E_x)^2 - (E_y)^2 - (E_z)^2 - (E_x)^2 + (H_z)^2 + (H_y)^2 - (E_y)^2 + (H_z)^2 + (H_x)^2 -$$
$$-(E_z)^2 + (H_y)^2 + (H_x)^2 = 2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2).$$

Здесь учтено, что для ковариантных компонент: $E_i = -E^i$, а $H_i = H^i$.

Таким образом, величина $\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2$ является инвариантом поля.

Из тензора поля можно образовать еще один «инвариант»: $e^{iklm}F_{ik}F_{lm}$. Здесь e^{iklm} это совершенно антисимметричный единичный тензор *четвертого* ранга.

Несложно доказать (мы уже опустим), что в трехмерном виде это приводит к инвариантности скалярного произведения **EH**.

Инвариантность вытекает из того, что все четыре индекса «сокращаются» при свертке. Правда, e^{iklm} является псевдотензором, так что мы получаем не вполне инвариант: не скаляр, а *псевдоскаляр*. Но его квадрат уже будет настоящим скаляром.

5. Тензорные поля

Мы вступили на территорию тензорных полей, это значит, что каждой точке пространства соответствует определенное значение некоторого тензора. Разумеется, скалярные и векторные поля – частные случаи тензорных.

Дифференцирование по координатам

Физические поля всегда в каком-то смысле «гладкие», то есть дифференцируемые: существуют производные по координатам от компонент тензоров. Имеются в виду производные такого порядка, которые могут реально потребоваться. Что обеспечивает законность применение дифференциальных операторов, знакомых по векторному анализу: *градиент*, *дивергенция*, *ротор*. Поскольку поле зависит от четырех координат, речь идет о *частных производных*.

Запишем, к примеру, тензор производных векторного поля A^i:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A^1}{\partial x^1} & \frac{\partial A^2}{\partial x^1} & \dots \\ \frac{\partial A^1}{\partial x^2} & \frac{\partial A^2}{\partial x^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что это смешанный (один раз контравариантный, один раз ковариантный) тензор второго ранга.

С его помощью можно выразить дифференциалы компонент 4-вектора в виде суммы:

$$dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} dx^k .$$

Правда, логично задаться вопросом, действительно ли таблица частных производных это тензор. Ведь если нет, то dA^i уже не являются компонентами вектора…

В самом начале изложения мы принимали, что при переходе к другому базису – новые значения компонент выражаются из старых просто линейными функциями, согласно (1.1). Но это несправедливо в случае криволинейных координат!

В искривленном пространстве $\frac{\partial A^i}{\partial x^k}$ и dA^i это не тензоры. Чтобы составлять тензорные выражения, требуется вносить некоторые поправки, зависящие от геометрической кривизны пространства.

Такие поправки называются *символами Кристоффеля*. И оказывается, что в физическом пространстве они же характеризуют гравитационное поле! Впрочем, здесь мы вступаем уже в сферу теории гравитации, чего в данном популярном очерке делать не собирались… На этом и окончим наш экскурс.

Вектор набла

Вам, конечно, известен оператор «*набла*», символический вектор в трехмерном пространстве, определяемый так:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Естественно, это не вектор в подлинном смысле: его компоненты – не числа, а операторы взятия частных производных. Однако он подчиняется всем векторным правилам. Поэтому считать его вектором крайне удобно.

В тензорных обозначениях он выглядит как $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. И видно, что если координаты контравариантны, то компоненты ∇ ковариантны (контравариантный индекс в знаменателе).

Через ∇ легко выражаются градиент, дивергенция и ротор. Но только в трехмерии! Цель нашего рассмотрения – явиться с этим аппаратом в 4-пространство, поскольку трехмерные дифференциальные операторы не лоренц-инвариантны.

Для этого надо получить инвариантные формы указанных операторов.

<u>4-градиент скалярного поля</u>

Градиент это вектор, характеризующий изменение скалярной величины ψ от точки к точке поля. В декартовых координатах вектор градиента имеет компоненты:

$$\operatorname{grad}\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right).$$

Или иначе можно записать: $\operatorname{grad}\psi = \nabla\psi$. Символический вектор набла условно «умножается» на скаляр φ. Так как вектор ∇ ковариантный, то и градиент это ковариантный вектор.

Еще один способ записи: $\operatorname{grad}\psi = \dfrac{\partial\psi}{\partial \mathbf{r}}$. Конечно, его не стоит понимать буквально (вектор не может же стоять в знаменателе!) Это не более чем условность.

Осталось разобраться, как выглядит запись 4-градиента $\dfrac{\partial\psi}{\partial x^i}$ в 4-пространстве. Подставляем в качестве x^0, x^1, x^2, x^3 четырехмерные координаты: ct, x, y, z. Получаем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right). \qquad (5.1)$$

Или так: $\dfrac{\partial\psi}{\partial x^i} = \left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}, \nabla\psi\right) = \left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}, \dfrac{\partial\psi}{\partial \mathbf{r}}\right).$

<u>Потенциальное поле</u>

Инвариант (скаляр) несложно получить путем скалярного умножения ковариантного вектора градиента на контравариантный вектор, например (в трехмерном случае), на вектор $d\mathbf{r}(dx, dy, dz)$:

$$\nabla\psi\ d\mathbf{r} = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz.$$

Почленно умножаются ковариантные и контравариантные компоненты, как и положено в скалярном произведении. Запишем в тензорной форме:

$$\nabla\psi\ d\mathbf{r} = \frac{\partial\psi}{\partial x^i}dx^i.$$

Результат является скаляром, и легко догадаться о его смысле: это полный дифференциал скалярной функции $d\psi$.

4-мерный вариант того же:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^i} dx^i = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} dt + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz \right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} dt + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right). \quad (5.1а)$$

Поскольку $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^i} dx^i$ является полным дифференциалом, то криволинейный интеграл, взятый по некоторому пути:

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x^i} dx^i = \int d\psi$$

– не зависит от пути интегрирования, и равен просто $\int d\psi = \psi_2 - \psi_1$, т. е. разности значений скаляров конечной и начальной точек траектории. Известно, что векторное поле $\frac{\partial \psi}{\partial x^i}$, обладающее таким свойством, называется *потенциальным*.

Поле градиента потенциально, и, наоборот, любое потенциальное поле это градиент некоторого скалярного поля.

4-дивергенция векторного поля

Дивергенция («расхождение») векторного поля это скаляр, следовательно, сам по себе инвариант. Следовательно, дивергенция должна получаться как «скалярное произведение». Так оно и есть!

В декартовых координатах:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial z}.$$

В тензорной форме:

$\nabla \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x^i} A^i$ (символическое скалярное произведение контравариантного вектора поля и ковариантного вектора набла).

А теперь 4-дивергенция в 4-пространстве:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \frac{\partial A^1}{\partial x} + \frac{\partial A^2}{\partial y} + \frac{\partial A^3}{\partial z}. \quad (5.2)$$

Дивергенция – результат свертки. То есть, это след тензора производных векторного поля: $\mathrm{Spur}\, \frac{\partial A^i}{\partial x^k}$. Но свертку вектора $\frac{\partial}{\partial x^i}$ можно произвести не только с вектором, но и с тензором большего ранга. Далее нам это пригодится.

4-ротор векторного поля

Ротором векторного поля A_i назовем тензорное поле, образующееся альтернацией между набла и A_i. Иначе говоря, это разность тензоров производных поля $\frac{\partial A^i}{\partial x^k}$ и $\frac{\partial A^k}{\partial x^i}$, где второй тензор – «*транспонированный*» (переставлены местами столбцы и строки).

В трех измерениях:

$$\operatorname{rot} A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} & \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} & 0 & \frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} & \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Здесь вектор A_i взят тоже в ковариантных компонентах, чтобы избежать смешанных индексов в итоге.

Как и полагается, результат – антисимметричный тензор 2-го ранга структуры Z_{ik}. Здесь всего три независимые компоненты, и его можно заменить дуальным аксиальным вектором:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}, \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}, \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right).$$

Что символически является векторным произведением набла с вектором поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}].$$

Вы, конечно, уверены, что именно это называют ротором. А вовсе не тензор (5.3)! Верно. Однако подмена антисимметричного тензора псевдовектором работает только в трехмерном пространстве. Поэтому, говоря о *4-роторе 4-векторного поля*, имеют в виду тензор, аналогичный (5.3). Только его матрица будет уже размером 4×4. И содержать он будет 6 независимых компонент, а не три.

Внимание: антисимметричный тензор 2-го ранга можно считать ротором некоторого векторного поля (в 4-пространстве – четырехвекторного). Эту идею мы ниже применим.

Четырехмерный потенциал

Вернемся к тензору электромагнитного поля (4.4), перепишем его, но только в ковариантной форме:

$$F_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку он антисимметричен, следовательно, может быть 4-ротором некоторого 4-векторного поля A. Вот и запишем его в виде ротора:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

где A – 4-вектор. Нам предстоит понять физический смысл этого 4-вектора (если таковой смысл существует, конечно).

Выразим через A трехмерный вектор электрического поля $\mathbf{E}$ – он соответствует верхней строке ковариантного тензора:

$$\mathbf{E} = F_{0k} = (F_{01}, F_{02}, F_{03}) = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1}, \frac{\partial A_2}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^2}, \frac{\partial A_3}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^3} \right).$$

Мы видим здесь разность двух векторов:

1) первый $\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^0}, \frac{\partial A_2}{\partial x^0}, \frac{\partial A_3}{\partial x^0}\right)$;

2) второй $\left(\frac{\partial A_0}{\partial x^1}, \frac{\partial A_0}{\partial x^2}, \frac{\partial A_0}{\partial x^3}\right)$.

Вспомнив, что $x^0 = ct$, первый вектор записываем в трехмерном виде как $-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{dt}$. Знак минус появился за счет ковариантности 4-вектора A.

Ну а второй пункт – это знакомые компоненты градиента скалярного поля. Окончательно записываем в трехмерной форме:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{dt} - \nabla A_0 .$$

Очевидно, что $A_0 = A^0$ это просто потенциал (*скалярный потенциал*) φ электрического поля. По аналогии $\boldsymbol{A}$ называют *векторным потенциалом*, и первый член отражает электрическое поле, связанное с меняющимся во времени магнитным полем.

А **потенциал поля в целом является 4-вектором**.

Введение 4-потенциала – это переход от тензорного к 4-векторному описанию поля. В ряде случаев оно оказывается проще! Сейчас продемонстрируем интересное применение данного подхода.

Аналогично выберем из матрицы F_{ik} компоненты магнитного поля:

$$\mathbf{H} = F_{0k} = (F_{32}, F_{13}, F_{21}) = \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^2}, \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3}, \frac{\partial A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1}\right).$$

Да ведь это обычный трехмерный ротор! Таким образом, получили:

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} .$$

Получаем уравнения Максвелла

Образуем такую сумму:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} . \qquad (5.4)$$

Замечаем, что это тензор 3-го ранга, полностью антисимметричный. В самом деле, поменяем местами любую пару индексов, например, i и k, получаем (учитывая антисимметрию тензора F):

$$\frac{\partial F_{ki}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{lk}}{\partial x^i} = -\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} .$$

Знак сменился на противоположный – антисимметрия налицо.

Подставляя теперь в (5.4) выражение поля через потенциал, получаем:

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 A_l}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^i \partial x^l} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 A_l}{\partial x^i \partial x^k} .$$

Но это же тождественный ноль, однородные члены сокращаются! Отсюда:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0 . \qquad (5.5)$$

Получили не что иное, как *первую пару уравнений Максвелла* в четырехмерной форме. Если пока не верится – сейчас проверим.

Слева стоит, как мы убедились, антисимметричный тензор. Значит, не равны нулю только те его компоненты, которые имеют все несовпадающие индексы. Таких компонент (значимых) всего 4 – для индексов $ikl = 123$, 012, 230, 301.

Вы скажете, что есть и другие комбинации? Но заметим, что им соответствуют точно такие же компоненты (либо имеющие противоположный знак). Например, компонента с номером 102 равна (с противоположным знаком) компоненте 012 (переставлены местами i и k), а компонента 120 просто равна ей (вторая перестановка – k и l).

Таким образом, (5.5) у нас распадается на 4 уравнения:

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^1} = 0,$$

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial F_{30}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{01}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^0} = 0.$$

Подставляем значения компонент тензора поля, и заодно вспоминаем, чему соответствуют координаты x^i 4-пространства:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0,$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0,$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} = 0.$$

Осталось привести в порядок знаки… и мы получили знакомую по учебникам пару уравнений Максвелла:

$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ (из первого),

$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ (из остальных трех).

Заметьте: получили чисто математическими выкладками! Значит, данные уравнения являются просто формальным выражением того факта, что поле может быть представлено 4-вектором. Никакой другой физики в них не содержится.

«Магнитный заряд»

Уравнение $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ говорит о том, что не существует «магнитных зарядов». Но, возможно это совсем не так – с физической точки зрения? И на самом деле потенциал поля не является 4-вектором?

Предположим, что $\operatorname{div} \mathbf{H} = \psi$. Вспомним, что вектор магнитного поля $\mathbf{H}$ – аксиальный. А поскольку дивергенция – тензорная операция, это означает, что гипотетический магнитный заряд ψ не может быть скаляром, это должен быть *псевдоскаляр*. При смене направления одной из осей координат (или всех трех) ψ должен сменить знак на противоположный!

Остается добавить, что физическая величина, подходящая на подобную роль, неизвестна.

6. Энергия-импульс

Можно считать, что мы овладели тензорным аппаратом, и на этом чтение можно закончить. Последующие разделы иллюстративные, они призваны показать, как много интересного в физике может быть получено при помощи тензоров.

Законы классической физики *локальны*, это означает, что происходящее в данной точке пространства зависит только от окружающих ее точек. Собственно говоря, в этом состоит концепция *близкодействия*. Между прочим, квантовая механика нелокальна!

Уравнение непрерывности

Принцип локальности – математически выражается уравнением непрерывности, которое мы легко выведем.

Пусть в пространстве имеется некоторая субстанция, обладающая свойством *сохраняемости* (не может пропадать, или возникать из ничего), и *непрерывности* (не может совершать скачки в пространстве, а только перетекать из одного места в другое).

Кстати, о непрерывности. Предположим обратное: в некотором месте пространства субстанция исчезла, но одновременно появилась в том же количестве в другом месте. Кажется, сохранение-то не нарушается?

Но ведь одновременность относительна; найдется система отсчета, в которой субстанция – там уже исчезла, а здесь еще не появилась. Либо наоборот. Получается, **если нечто сохраняется, то оно обязательно непрерывно!**

Обозначим плотность субстанции в каждой точке через ρ, тогда ее количество в объеме V представится интегралом:

$\int \rho \, dV$ (интеграл берется по всему объему).

Данная величина соответствует одному моменту времени. А изменение количества во времени, согласно обозначенному свойству, может происходить только за счет притока и оттока через поверхность нашего объема.

Обозначим поток субстанции в каждой точке через $\mathbf{j}$. *Потоком* будем называть вектор течения, величина которого равна количеству, переносимому в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную потоку.

Через площадку $d\mathbf{S}$, произвольно ориентированную, в единицу времени переносится $\mathbf{j}\, d\mathbf{S}$ субстанции – здесь участвует скалярное произведение. А поток через всю замкнутую поверхность:

$$\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{S}.$$

Скорость изменения количества субстанции внутри поверхности, ограничивающей объем V – это, очевидно, поток через ее поверхность:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \, dV = -\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{S}. \qquad (6.1)$$

Знак минус оттого, что вектор $d\mathbf{S}$ принят направленным наружу из объема. Так что течение внутрь объема (увеличение, положительная производная) соответствует направлению потока против $d\mathbf{S}$. Такие вещи приходится учитывать, когда имеем дело с аксиальными векторами.

Полученное очевидное уравнение называется *уравнением непрерывности*. Мы его еще более упростим. Для чего используем известную *формулу Гаусса-Остроградского*:

$$\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = \int \operatorname{div}\ \mathbf{j}\, dV\ .$$

Которая означает: поток векторного поля через замкнутую поверхность можно заменить интегралом по объему от дивергенции поля.

Теперь в (6.1) два однородных интеграла, их можно объединить:

$$\int\left(\operatorname{div}\ \mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dV = 0\ .$$

Да и сам интеграл можно выкинуть, так как равенство нулю должно обеспечиваться для произвольного объема:

$$\operatorname{div}\ \mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0\ . \qquad (6.2)$$

Получили универсальное уравнение непрерывности. Но сейчас мы поступим еще смелее! Для чего распишем компоненты дивергенции:

$$\operatorname{div}\ \mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial c\rho}{\partial t}\ .$$

Узнаете? Это же 4-дивергенция 4-вектора, имеющего компоненты $j^i(c\rho, \mathbf{j})$. Окончательно записываем наше уравнение непрерывности так:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0\ . \qquad (6.3)$$

Красивый результат! Хотя его можно поставить под сомнение: является ли $j^i(c\rho, \mathbf{j})$ 4-вектором? Да, является! Об этом свидетельствует равенство $\frac{\partial j^i}{\partial x^i}$ нулю, то есть скаляру.

4-ток

Мы проводили рассуждения без конкретики, рассматривая вообще среду, хотя бы и клюквенный кисель. Поищем в электродинамике что-то, для чего действительно уравнение непрерывности.

Начнем с простого. Как известно, заряд e сохраняется. Поэтому средой, удовлетворяющей уравнению непрерывности, может быть рассредоточенный в пространстве *электрический заряд*.

Обозначение $\rho = \frac{de}{dV}$ мы теперь припишем *объемной плотности заряда*, $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ называют *вектором плотности тока*. 4-вектор $j^i(c\rho, \mathbf{j})$ принято называть *4-током* (конечно, более правильно – четырехмерная плотность тока). Как видно, временной компонентой 4-тока служит плотность заряда.

Уравнение непрерывности (6.3) справедливо для заряда.

Еще уравнения Максвелла

Интересно в качестве нашей субстанции рассмотреть поле. Помните идею о том, что возможна дивергенция тензорного поля? Вот и запишем дивергенцию тензора электромагнитного поля F^{ik}. Она является 4-вектором с индексом *i*: $\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}$, то есть, образует 4-векторное поле. Последнее, в свою очередь, тоже имеет дивергенцию: $\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k}$.

Но это выражение равно нулю! В самом деле, переставим местами индексы, тогда каждая из компонент F^{ik} сменит знак (антисимметрия). Но выражение в целом симметрично относительно *i* и *k*, значит, оно от перестановки индексов меняться не может. Вывод очевиден.

Таком образом, $\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right) = 0$. А это есть уравнение непрерывности (6.3). Итак, мы нашли 4-вектор: $\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}$, зависящий от поля, удовлетворяющий уравнению непрерывности!

Интересно понять его физический смысл. К примеру, найдем его нулевую компоненту:

$$\frac{\partial F^{0k}}{\partial x^k} = \frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\operatorname{div} \mathbf{E}.$$

Но, как известно из физики, $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ (закон Гаусса). Вот так разочарование: оказалось, что $\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}$ это знакомый вектор 4-тока $j^i(c\rho, \mathbf{j})$, с точностью до коэффициента $-\frac{4\pi}{c}$.

Раз уж так, можно приравнять друг к другу поле 4-вектора $\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i}$ и поле 4-тока (с коэффициентом $-\frac{4\pi}{c}$):

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i} = -\frac{4\pi}{c} j^k. \qquad (6.4)$$

Сюрприз: уравнения (6.4) представят *вторую пару уравнений Максвелла*. Это легко проверить самостоятельно, получив:

$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ при $k = 0$;

$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}$ при $k = 1, 2, 3$.

Волновое уравнение

Уравнение (6.4) в ковариантной записи: $\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_i} = -\frac{4\pi}{c} j_k$ выразим через потенциал, вспоминая, что $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x^i} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_i \partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j_k. \qquad (6.5)$$

А теперь сделаем небольшое отступление. Предположим, что 4-вектор потенциала является 4-градиентом некоторого скалярного поля ψ:

$A_i = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$.

Найдем поле потенциала:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^k} = 0 .$$

Поле равно нулю! Это означает: если к потенциалу прибавить градиент любой скалярной функции, это никак не повлияет на поле. Да и из стандартного векторного анализа известно, что ротор градиента равен нулю (а поле это ротор).

Говорят, что электромагнитное поле обладает свойством *градиентной инвариантности*.

Кстати, такой скалярной функцией может быть дивергенция потенциала $\psi = \frac{\partial A_k}{\partial x_k}$. Ее градиент: $\frac{\partial \psi}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^i \partial x_k}$. Таким образом, данное выражение можно свободно прибавлять к потенциалу или отнимать от него – на поле это не повлияет.

Возвращаясь к (6.5), видим, что второе слагаемое как раз и является именно тем, что можно отбросить. Тогда останется:

$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x^i} = -\frac{4\pi}{c} j_k$ (*уравнение Д'Аламбера*, или *волновое уравнение*).

В пустом пространстве, где отсутствуют заряды и токи, оно превращается в «уравнение без правой части»:

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x^i} = 0 .$$

Распишем подробно произвольную k-ю компоненту потенциала:

$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_0}\right) + \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_3}\right)$. Не забываем, что два одинаковых индекса (один наверху, другой внизу) это сумма!

Ну а теперь:

1) вспоминаем значения координат 4-пространства;

2) ковариантность $\frac{\partial}{\partial x^i}$ учитываем минусами перед пространственными координатами.

Тогда имеем:

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x^i} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_k}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_k}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_k}{\partial z}\right).$$

Получили волновое уравнение в трехмерной форме:

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} = 0 . \qquad (6.6)$$

Оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ называют оператором Лапласа, так что (6.6) можно записать кратко:

$$\Delta A_k - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} = 0 . \qquad (6.6a)$$

Оператор Лапласа – скалярный (как дивергенция), но не лоренц-инвариантный (поскольку трехмерный). А вот оператор $\Delta - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, то есть $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x^i}$, уже является 4-мерным «скаляром». Его принято называть оператором Д'Аламбера, и обозначать □. Волновое уравнение без правой части выглядит при таком обозначении:

$$\Box\, A_k = 0 .$$

То же самое уравнение справедливо и для любой компоненты поля – электрического, магнитного.

4-плотность потока массы

Возьмем теперь массу m. Обозначение $\rho = \frac{dm}{dV}$ соответствует *массовой плотности*, $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ будет *потоком массы* – вектор, величина которого равна массе, переносимой в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную потоку. И опять появляется 4-вектор $j^i(c\rho,\ \mathbf{j})$, удовлетворяющий уравнению непрерывности (6.3).

Временная и пространственная компоненты j^i наводят здесь мысль об энергии (масса!) и импульсе (масса на скорость!). Умножим компоненты нашего 4-вектора на $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Получаем:

$$\rho' = \frac{dm}{dV}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{d\mathsf{E}}{dV} \text{ (помня, что } \mathsf{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\text{)}.$$

$$\mathbf{j}' = \rho'\mathbf{v} = \frac{dm}{dV}\cdot\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} \text{ (помня, что } \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\text{)}.$$

Компоненты 4-вектора: $\frac{d\mathsf{E}/c}{dV}$ и $\frac{d\mathbf{p}}{dV}$. Видим тут знакомые компоненты 4-вектора энергии-импульса $p^i = (\mathsf{E}/c, \mathbf{p})$. Казалось бы, получили 4-вектор, физический смысл которого – поток энергии-импульса…

Неприятный сюрприз: это все неверно! Нельзя было умножать на $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, эта величина не инвариант, мы не могли получить 4-вектора.

А как же управиться с энергией-импульсом? Сейчас увидим.

Тензор энергии-импульса

Энергия (так же, как и импульс) сохраняется. Значит, и для нее справедливо уравнение непрерывности. Во всяком случае, уравнение типа (6.2).

В нем должны, естественно, фигурировать *плотность энергии* W и *поток энергии* $\mathbf{S}$:

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \text{, или:}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x^0}+\frac{\partial S_x/c}{\partial x^1}+\frac{\partial S_y/c}{\partial x^2}+\frac{\partial S_z/c}{\partial x^3}=0\,. \qquad (6.7)$$

Деление на c нужно для согласования размерностей с еще тремя уравнениями – для каждой компоненты импульса. В них уже будут фигурировать плотность импульса и поток импульса. Всего получается четыре уравнения непрерывности. Но есть важная оговорка.

До сих пор мы исходили из того, что количество «субстанции» в объеме dV инвариантно. Например, заряд – это инвариант, скаляр.

Внимание: энергия не инвариант, импульс тоже! W и $\mathbf{S}$ не являются компонентами 4-вектора, переход к (6.3) невозможен.

Как известно, энергия и импульс являются компонентами 4-вектора энергии-импульса. Значит, левые части уравнений непрерывности – тоже компоненты 4-вектора (который равен нулю).

Чтобы оператор $\frac{\partial}{\partial x^i}$ дал 4-вектор, он должен быть применен к тензору 2-го ранга, то есть, на месте уравнения (6.3) $\frac{\partial j^i}{\partial x^i}=0$ – появляется:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^i}=0\,, \qquad (6.8)$$

$$T^{ik}=\begin{bmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix}$$ – *тензор энергии-импульса.*

Уравнение (6.8) как раз распадается на четыре уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial x^0}+\frac{\partial T^{10}}{\partial x^1}+\frac{\partial T^{20}}{\partial x^2}+\frac{\partial T^{30}}{\partial x^3}=0\,,$$

$$\frac{\partial T^{01}}{\partial x^0}+\frac{\partial T^{11}}{\partial x^1}+\frac{\partial T^{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial T^{31}}{\partial x^3}=0\,,$$

– и так далее.

Первое из них мы уже знаем, так что: $T^{00}=W$, $T^{10}=S_x/c$, $T^{20}=S_y/c$, $T^{30}=S_z/c$. Подматрица:

$$\begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix}$$

имеет в физике обозначение:

$$\begin{bmatrix} -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{bmatrix},$$

и называется *тензором напряжений* – название, идущее из механики сплошных сред. У нас, конечно, никаких «напряжений» нет. И, к примеру, $(-\sigma_{zx})$ это количество z-й компоненты импульса, протекающее через единичную площадку, перпендикулярную оси x, в единицу времени.

Из-за равноправия пространственных координат тензор напряжений симметричен, то есть, его компоненты не изменяются при перестановке индексов. Так что и весь тензор энергии-импульса симметричен, поэтому:

$$T^{01} = S_x / c \,, \; T^{02} = S_y / c \,, \; T^{03} = S_z / c \,.$$

7. Волны материи

Будем рассматривать теперь *монохроматические* волны. Это означает, что в любой точке пространства поле (электрическое, магнитное, потенциал) является синусоидальной функцией времени: колеблется с определенной круговой частотой ω. В комплексной форме это записывается, как известно, следующим образом: $F = e^{i\psi}$, где ψ – полная фаза. Амплитуду полагаем единичной – для простоты.

Волновой 4-вектор

Рассмотрим фазу ψ колебания в каждой данной 4-точке. Поле фаз это скалярное поле, и можно записать его градиент:

$$\nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right).$$

Как обычно, переходим в 4-пространство и находим 4-градиент:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}, \nabla\psi\right).$$

Разбираемся с физическим смыслом полученного 4-вектора. Временная компонента содержит производную фазы по времени при фиксированных координатах; это не что иное, как круговая частота ω.

Пространственная компонента, градиент фазы – это (для фиксированного момента времени) вектор, направленный в сторону наиболее быстрого увеличения фазы. Учитывая, что фаза на пути, равном длине волны λ, меняется на 2π, абсолютная величина градиента равна $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$. В физике это так называемый *волновой вектор* **k**, а его длина $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – *волновое число*.

Точнее, волновой вектор это вектор, противоположный описанному: $\mathbf{k} = -\nabla\psi$, так как считают, что он должен показывать направление распространения волны. В то время как фаза возрастает, наоборот, против движения волны (до более дальних точек она доходит с запозданием).

Теперь уже можно записать:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^i} = \left(\frac{\omega}{c}, -\mathbf{k}\right).$$

Как любой градиент, это ковариантный вектор k_i. Перейдем к контравариантному, поменяв знак у пространственной части. Окончательно:

$$k^i = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right). \qquad (7.1)$$

Естественно назвать k^i *волновым 4-вектором*.

Плоская волна

Поле волнового вектора *потенциально* (как поле градиента). Вспомните, что в таком случае криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования:

$$\int k_i dx^i = \int \frac{\partial \psi}{\partial x^i} dx^i = \int d\psi = \psi_2 - \psi_1 .$$

Считая начальную фазу нулевой, получаем:

$$\psi = \int k_i dx^i .$$

Имея в виду, что $k_i = \left(\frac{\omega}{c}, -\mathbf{k} \right)$, $dx^i = (cdt, d\mathbf{r})$, получаем для скалярного произведения: $k_i dx^i = \omega dt - \mathbf{k} d\mathbf{r}$.

Тогда: $\psi = \omega t - \mathbf{kr}$.

Здесь t и $\mathbf{r}$ – временная и пространственная координаты, отсчитанные от условного начала координат. Интеграл взят от нулевой точки до точки $x^i = (ct, \mathbf{r})$.

Запишем плоскую волну известным образом в комплексной форме:

$$F = e^{i\psi} = e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}. \qquad (7.2)$$

Разумеется, амплитуда волны может быть произвольной, и здесь опущена.

Скорость света

Пусть F – компонента электрического или магнитного поля (неважно). Вспоминаем волновое уравнение (6.6а):

$$\Delta F - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0. \qquad (*)$$

Подставим в уравнение комплексное выражение для F (7.2):

$$\frac{\partial^2 e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}}{\partial t^2} = 0.$$

Частные производные вычислить несложно, при этом получается (проверьте!):

$$-k^2 e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} + \frac{\omega^2}{c^2} e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} = 0.$$

Если при нахождении производных встретите трудности, тогда для простоты считайте, что волна распространяется вдоль оси x, и тогда $\mathbf{kr}$ можно заменить на kx (k – волновое число).

Очевидно, что для равенства нулю должно быть: $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2$. А поскольку $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, то получается: $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$. Или $c = \frac{\omega\lambda}{2\pi}$.

Но для любых вообще волн справедливо: $v_\phi = \frac{\omega}{k}$, где v_ϕ – фазовая скорость волны (в направлении волнового вектора). Из соотношения $c = \frac{\omega\lambda}{2\pi}$ следует, что $v_\phi = c$, фазовая скорость электромагнитных волн равна фундаментальной постоянной c. Интересно, что до сих пор нам это не было известно! А стало ясно только сейчас, при анализе волнового уравнения.

Решения волнового уравнения

Мы убедились, что функции вида $F = e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}$ (с произвольным множителем) являются решениями волнового уравнения. Но, разумеется, не только они! Поскольку уравнение линейно, то и любая линейная комбинация (суперпозиция) функций такого вида тоже будет решением.

Будем для простоты рассматривать волну вдоль оси x: $F = e^{i(\omega t - kx)}$, и перейдем к новой координате τ вида:

$$\tau = t - \frac{kx}{\omega} = t - \frac{x}{c}.$$

Мы как бы перешли к системе координат, движущейся вместе с волной – с ее скоростью. Тогда получаем:

$$F = e^{i\omega\tau}.$$

Но, как известно, такого рода функции входят в интеграл Фурье. Любую функцию переменной τ можно представить суперпозицией функций вида $e^{i\omega\tau}$ (с произвольными частотами) – при разумных ограничениях, конечно. То есть, она будет решением волнового уравнения.

Итак, произвольная функция, перемещающаяся вдоль оси x со скоростью c, удовлетворяет волновому уравнению, и может распространяться в пространстве! А не только «синусоидальная», как иногда воображают. «Форма» функции при распространении не меняется. Это связано с тем, что электромагнитные волны в вакууме не диспергируют (скорость не зависит от длины волны).

Уравнение Клейна-Гордона

Волны необязательно являются электромагнитными, и в общем случае $v_\phi \neq c$. Волновое уравнение, например, для акустических волн выглядит так:

$$\Delta F - \frac{1}{v_\phi^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

Оно даже инвариантно относительно своеобразных «преобразований Лоренца», в которых вместо константы c фигурирует v_ϕ. Но здесь нет глубокого смысла: в приведенной форме уравнение справедливо только в системе отсчета, связанной со средой распространения. Потому оно вне нашего рассмотрения, посвященного инвариантам.

Нас будут интересовать волны, играющие в физике фундаментальную роль, и связанные с переносом массы. Чтобы волновое уравнение (*) описывало такую волну, его надо модифицировать. Это делают добавлением слагаемого:

$$\Delta F - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \kappa^2 F = 0,$$ где κ^2 – константа.

В более компактной записи:

$$\Box F - \kappa^2 F = 0.$$

Усовершенствованное волновое уравнение называют *уравнением Клейна-Гордона*. – это одно из важнейших уравнений теоретической физики. Но не будем принимать на веру, а убедимся, что оно работает.

$$-k^2 e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} + \frac{\omega^2}{c^2} e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} - \kappa^2 e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} = 0,$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \kappa^2, \qquad (7.3)$$

$$\kappa^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 = k^2\left(\frac{v_\phi^{\ 2}}{c^2} - 1\right). \qquad (7.4)$$

Здесь учтено, что $\omega = v_\phi k$. Выкладки школьного уровня, но результат важный. Для начала он показывает, что величина κ^2 может быть нулевой, положительной или отрицательной – в зависимости от того, что больше: v_ϕ или c. Наоборот, если известна κ^2, то из (7.4) получаем значение фазовой скорости.

Инвариант волнового вектора

Инвариант (скалярный квадрат) волнового вектора $k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right)$, очевидно, равен: $k^i k_i = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$.

Внимание: не следует смешивать инвариант (скалярный квадрат) волнового 4-вектора $k^i k_i$, и скалярный квадрат трехмерного волнового вектора k^2 – квадрат волнового числа.

А с учетом (7.3) получается, что $k^i k_i = \kappa^2$.

Таким образом:

1) при $\kappa^2 = 0$ и $k^i k_i = 0$: $v_\phi = c$ (электромагнитные волны);

2) при $\kappa^2 < 0$ и $k^i k_i < 0$: $v_\phi < c$;

3) при $\kappa^2 > 0$ и $k^i k_i > 0$: $v_\phi > c$.

Значение фазовой скорости легко выводится из (7.4):

$v_\phi = c\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{k^2}}$. А если подставить $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, то получится $v_\phi = c\sqrt{1 + \frac{\kappa^2 \lambda^2}{4\pi^2}}$.

Или, с учетом того, что $\lambda = \frac{2\pi v_\phi}{\omega}$:

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{c^2 \kappa^2}{\omega^2}}}.$$

Дуализм волн и частиц

Сравним два уравнения:

1) $k^i k_i = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \kappa^2$ – уравнение (7.3), инвариант волнового 4-вектора;

2) $p^i p_i = \frac{\mathsf{E}^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$ – основное уравнение динамики, инвариант 4-вектора энергии-импульса.

Они очень похожи! Получается, что волновой 4-вектор $k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right)$ (7.1) это аналог 4-вектора энергии-импульса частицы $p^i = \left(\frac{\mathsf{E}}{c}, \mathbf{p}\right)$. Чтобы он полностью совпал с таковым, умножим $\left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right)$ на коэффициент $\hbar$, уравнивающий размерности:

$$\hbar k^i = \hbar\left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right) = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\mathbf{k}\right) = p^i. \qquad (7.1a)$$

Теперь, в (7.1a): $\mathsf{E} = \hbar\omega$ – полная энергия, $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ – импульс. Но, позвольте, энергия и импульс – чего? Ведь речь идет о монохроматической волне, ее энергия бесконечна…

Придется положить, что существует минимальная порция волны – *квант*, тогда имеем выражения для энергии и импульса кванта. Не является секретом, что $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ это *приведенная постоянная Планка*, а h – просто *постоянная Планка*. Вместо круговой частоты иногда применяют обычную (ν), и тогда энергия кванта $\mathsf{E} = h\nu$.

Удивительное свойство природы: что допустимо математически, то обязательно состоится в реальности. Монохроматическая волна и частица описываются аналогичными соотношениями. Опыт показывает, что, и в самом деле, **частицам соответствуют волны, а волнам – частицы**.

Тогда уравнение (7.3) будет выглядеть так:

$$\frac{\hbar^2\omega^2}{c^2} - \hbar^2 k^2 = \hbar^2\kappa^2. \qquad (7.5)$$

Получили уравнение динамики в волновой форме. Так как справа должно стоять m^2c^2, заодно и узнали, наконец, чему равна наша константа κ^2. Она соответствует массе, переносимой волной:

$$\kappa^2 = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}.$$

Теперь можно выразить фазовую скорость волны через характеристики соответствующей ей частицы:

$$v_\phi = c\sqrt{1+\frac{\kappa^2}{k^2}} = c\sqrt{1+\frac{m^2c^2}{p^2}}$$ (постоянная Планка сокращается).

Подставляя $m^2c^2 = \frac{\mathsf{E}^2}{c^2} - p^2$, приходим к чрезвычайно простой формуле: $v_\phi = \frac{\mathsf{E}}{p}$.

А учитывая, что: $\mathsf{E} = \frac{pc^2}{v}$, где v – скорость частицы, отвечающей волне, получаем еще проще: $v_\phi = \frac{c^2}{v}$.

Длина волны, соответствующей частице:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p}.$$

Фотон

Пусть $m = 0$. Получаем уже знакомое: $\kappa^2 = 0$, $v_\phi = c$ – скорость волны равна c, это ситуация электромагнитной волны, имеющей нулевую массу.

Такой волне соответствует частица с энергией $\mathsf{E} = \hbar\omega$ и импульсом $p = \dfrac{\hbar\omega}{c}$, известная как *фотон*.

Мы уже отмечали, что для случая нулевой массы $k^i k_i = 0$. Вспоминая, что волновой вектор это градиент фазы, получаем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = 0.$$

Это известное *уравнение эйконала*, применяемое в геометрической оптике. А фазу ψ называют *эйконал*.

Эффект Доплера

Перепишем формулу преобразований Лоренца для нулевой компоненты 4-вектора x^i:

$$x'^0 = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

И применим ее к 4-вектору $k^i = \left(\dfrac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right)$. Считаем для простоты, что $k^2 = 0$ и $k^3 = 0$ (распространение волны вдоль оси x), $k^1 = k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

Получаем: $k'^0 = \dfrac{\omega'}{c} = \dfrac{\frac{\omega}{c} - \frac{2\pi v}{\lambda c}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \dfrac{\omega}{c}\cdot\dfrac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, поскольку для электромагнитной волны $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$.

Отсюда: $\omega' = \dfrac{\omega\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. (7.6)

Это формула изменения частоты при переходе к системе отсчета, движущейся относительно первоначальной со скоростью v – формула *продольного эффекта Доплера*. Разумеется, она же действительна для преобразования энергии кванта $\mathsf{E} = \hbar\omega$:

$$\mathsf{E}' = \frac{\mathsf{E}\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Впрочем, мы можем пустить волну и поперек взаимного движения систем отсчета. Например, вдоль оси y. Тогда волновой вектор: $(0, 0, \dfrac{2\pi}{\lambda}, 0)$, и в формуле Лоренца –

$$x'^0 = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

– в качестве x_1 придется подставить ноль. Получается формула поперечного эффекта Доплера:

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \qquad (7.6а)$$

Формула Эйнштейна

Рассмотрим элементарную систему из двух противоположно движущихся электромагнитных волн (если хотите – фотонов). Каждому соответствует частота ω. Для такой системы – формула для безмассовой материи $p = \mathsf{E}/c$ несправедлива (импульс ноль, а энергия не ноль). Получается, что наша **система должна иметь ненулевую массу** m. Энергия двух квантов $\mathsf{E}_0 = 2\hbar\omega$. Назовем ее энергией покоя, ведь система в целом покоится (ее общий импульс равен нулю).

Получим выражение для массы системы. Для этого перейдем в другую систему отсчета, движущуюся относительно первой с малой скоростью v. Скорость по-прежнему направлена по линии движения фотонов.

В этих новых координатах наша двухквантовая система, ранее покоившаяся, движется – со скоростью v. Частоты, соответствующие двум волнам, изменятся в противоположные стороны (эффект Доплера):

$$\omega_1 = \frac{\omega\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \ \omega_2 = \frac{\omega\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Общая энергия это сумма энергий фотонов:

$$\mathsf{E} = \frac{\hbar\omega\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + \frac{\hbar\omega\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{2\hbar\omega}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{\mathsf{E}_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Поскольку у нас $v << c$, то приближенно получается:

$$\mathsf{E} = \frac{\mathsf{E}_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \approx \frac{\mathsf{E}_0}{1 - v^2 / 2c^2} \approx \mathsf{E}_0(1 + v^2 / 2c^2).$$

Видим, что энергия движущейся системы увеличилась на $\mathsf{E}_0 v^2 / 2c^2$. По физическому смыслу, это – ее кинетическая энергия, она равна $\frac{mv^2}{2}$. Приравнивая, получаем: $\mathsf{E}_0 = mc^2$, знаменитую *формулу Эйнштейна* для энергии покоя.

Волны де Бройля

Допустим теперь, что $m > 0$, то есть, $\kappa^2 > 0$. Тогда $v_\phi > c$. Точнее, как мы уже знаем, $v_\phi = \frac{\mathsf{E}}{p}$. И снова: $\lambda = \frac{h}{p}$.

Это *волны де Бройля*, связанные с массивной частицей. **Фазовая скорость волн де Бройля сверхсветовая** – тут нет ничего, противоречащего теории относительности: фазовая скорость это скорость перемещения нематериального, математического объекта (геометрического места точек постоянной фазы).

Дисперсия волн

Заметим, что $\kappa^2 = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}$ является величиной, характеризующей частицу, по существу – квадратом массы. Но тогда из формул для v_ϕ выходит, что фазовая скорость волны де Бройля зависит от длины волны и частоты. Такое явление называют *дисперсией*.

Дисперсию принято описывать *дисперсионным уравнением*: $\omega = \omega(k)$, связывающим частоту с волновым вектором. Такое уравнение у нас есть, это (7.3), инвариант волнового 4-вектора:

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \kappa^2. \qquad (7.7)$$

Как мы знаем, это уравнение соответствуют уравнению релятивистской динамики: $\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$. Нередко последнее также называют дисперсионным уравнением.

Дисперсия связана с тем, что фазовая скорость волн $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$ не совпадает с групповой скоростью $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}$. Из уравнения (7.7) видно, что дисперсия всегда будет присутствовать при $\kappa^2 \neq 0$, то есть, $m \neq 0$. А значит, волны де Бройля диспергируют.

Для нерелятивистской частицы ($v << c$) возьмем школьные формулы кинетической энергии $\frac{mv^2}{2}$ и импульса mv. Получим: $v_{gr} = v$, т. е. групповая скорость волны де Бройля равна скорости частицы (что логично). Но то же выйдет и в релятивистском случае, только выкладки более громоздкие.

Дисперсия волн де Бройля не позволяет представить частицы как волновые пакеты, ограниченные в пространстве: подобный пакет должен расплываться со временем.

Уравнение Шредингера

Вспомним наше уравнение Клейна-Гордона:

$$\Delta F - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \kappa^2 F = 0.$$

F это любая величина, соответствующая волне. В случае волны, эквивалентной массивной частице, присвоим этой величине обозначение Ψ. И подставим в уравнение значение константы: $\kappa^2 = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}$.

Получаем: $\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi = 0$.

Для монохроматической волны, по (7.2): $\Psi = e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}$. Подставляем $k = \frac{p}{\hbar}$, $\omega = \frac{E}{\hbar}$:

$$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{pr})}.$$

Однократное дифференцирование по времени дает:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{iE}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{pr})} = \frac{iE}{\hbar}\Psi.$$

Окончательно:

$$\Delta\Psi - \frac{i\mathrm{E}\Psi}{\hbar c^2}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi = 0.$$

Что является релятивистским *уравнением Шредингер*а для свободной частицы. Величина Ψ (в общем случае комплексная) называется *волновой функцией*.

Тахион

Осталось рассмотреть случай «медленных» волн, когда фазовая скорость волн $v_\phi < c$.

Как известно, в этом случае $\kappa^2 = \frac{m^2c^2}{\hbar^2} < 0$. Значит, если таким волнам сопоставить частицы, они должны иметь *мнимую массу* ($m^2 < 0$). Это *тахион* – гипотетическая частица, движущаяся со скоростью, большей скорости света: $v = \frac{c^2}{v_\phi}$.